

1920.

FEB 2 - 1921

46 No. 22.

GENERAL LIBRARY  
FEB - 5 1921  
UNIV. OF MICH.  
**ANNALEN  
DER  
PHYSIK.**

BEGRÜNDET UND FORTGEFÜHRT DURCH

**P. A. C. GREN, L. W. GILBERT, J. C. POGGENDORFF, G. U. E. WIEDEMANN, P. DRUDE.**

**VIERTE FOLGE.**

**Band 63. Heft 6.**

DER GANZEN REIHE 368. BANDES 6. HEFT.

**KURATORIUM:**

**M. PLANCK, G. QUINCKE,  
W. C. RÖNTGEN, E. WARBURG.**

**UNTER MITWIRKUNG**

**DER DEUTSCHEN PHYSIKALISCHEN GESELLSCHAFT**

**HERAUSGEGEBEN VON**

**W. WIEN UND M. PLANCK.**



**LEIPZIG.**

**VERLAG VON JOHANN AMBROSIIUS BARTH.  
DÖRRIENSTRASSE 16.**

*Bestellungen auf die „Annalen“ werden von allen Buchhandlungen und von der Verlagsbuchhandlung angenommen. Im Jahre 1920 erscheinen Bd. 61, 62 und 63 à 8 Hefte. Preis von Bd. 61 u. 62 je M 45.—. Bd. 63 M 60.—.*

*Nach dem Ausland in der Währung des betr. Landes.*

**Ausgegeben am 16. November 1920.**

# Inhalt.

	Seite
1. Erwin Schrödinger. Grundlinien einer Theorie der Farbenmetrik im Tagessehen. (8. Mitteilung) . . . . .	481
2. Reinhold Fürth. Zur Beweglichkeitsbestimmung aus der Brownschen Bewegung an einem Einzelteilchen. (Aus dem physikalischen Institut der deutschen Universität in Prag). . .	521
3. Max Jakob. Bestimmung der Wärmeleitfähigkeit des Wassers im Bereich von 0 bis 80°. (Mitteilung aus der Physikalisch-Technischen Reichsanstalt) . . . . .	537
4. H. Dember und M. Uibe. Über die spektrale Polarisierung des diffusen Sonnenlichts in der Erdatmosphäre . . . . .	571
5. Hilding Faxén. Der Gültigkeitsbereich der Stokes-Oseenschen Widerstandsformel. Erklärung einiger von J. Weyssenhoff gefundener Unstimmigkeiten . . . . .	581

Die Redaktion der Annalen wird von den umseitig genannten Herren besorgt. Den geschäftlichen Teil hat Herr Geh. Hofrat Prof. W. Wien übernommen, an den auch Manuskripte zu senden sind. Seine Adresse ist: München, Leopoldstraße 91.

Es wird gebeten, die Manuskripte **druckfertig** einzuliefern und in den Korrekturen den beim Druck für sie verwendeten Raum nicht zu überschreiten.

Für die Aufnahme von Dissertationen gelten besondere Bedingungen, welche vom Verlag bekannt gegeben werden.

Die Verlagsbuchhandlung liefert 100 **Sonderabdrücke** jeder Arbeit kostenfrei. Falls ausnahmsweise mehr gewünscht werden, so muß dies bei Rücksendung des ersten Korrekturbogens an die Druckerei auf dessen erster Seite bemerkt werden. Alle anderen, die Sonderabdrücke betreffenden Mitteilungen bittet man an die Verlagsbuchhandlung zu richten.

**Anderweitiger Abdruck** der für die Annalen bestimmten Abhandlungen oder Übersetzung derselben innerhalb der gesetzlichen Schutzfrist ist nur mit Genehmigung der Redaktion und Verlagsbuchhandlung gestattet.

Die **Zeichnungen** sind in möglichst sorgfältiger Ausführung den Abhandlungen auf besonderen Blättern beizulegen (nicht in das Manuskript selbst einzzeichnen). Da die Figuren fortan möglichst in den Text eingefügt werden sollen, ist die Stelle des Manuskriptes recht genau anzugeben, wo sie hingehören.

**Zitate** sind am Rande oder unten auf den Seiten des Manuskriptes (nicht in dem Text selbst) und zwar möglichst in der in den „Fortschritten der Physik“ üblichen Form mit Angabe des Namens und Vornamens, der Band-, Seiten- und Jahreszahl aufzuführen.







# ANNALEN DER PHYSIK.

## VIERTE FOLGE. BAND 63.

### 1. *Grundlinien einer Theorie der Farbenmetrik im Tagessehen;*

*von Erwin Schrödinger.*

(III. Mitteilung.)

#### Der Farbenmetrik II. Teil: Höhere Farbenmetrik (eigentliche Metrik der Farbe).

##### § 1. Notwendigkeit, über die niedere Metrik hinauszugehen.

Im ersten Teil dieser Arbeit hatten wir es mit denjenigen Beziehungen zwischen Farben zu tun, welche experimentell gewonnen werden durch ausschließliche Verwendung des Gleichheitsurteils, d. h. der Einstellung zweier aneinander grenzender Farbfelder auf völlige Ununterscheidbarkeit, so daß die Trennungslinie, wenn sie sonst durch nichts bezeichnet ist, als durch die eventuelle Farbverschiedenheit, verschwindet. Diese Beziehungen, gewöhnlich als Gesetze der Lichtmischung, von uns als niedere Farbenmetrik oder Affinität der Farbe bezeichnet, fanden ihre vollkommen adäquate Darstellung durch Abbildung der Farbenmannigfaltigkeit auf ein räumliches Vektorbüschel mit affiner Geometrie. Wir haben wiederholt darauf hingewiesen, daß wegen der genauen Übereinstimmung der primitiven Farberfahrung mit den Axiomen der affinen Geometrie solche und nur solche Beziehungen zwischen den darstellenden Vektoren ein kolorimetrisches Korrelat haben, die invariant sind gegen affine Transformation. Eine ganze Anzahl einfacher Beziehungen, für welche das nicht zutrifft, so insbesondere der Winkel und das Längenverhältnis zweier Vektoren von verschiedener Richtung, dann der Abstand zweier Vektorspitzen (Farbenpunkte), mußten ohne Korrelat im Farbenraum bleiben, weil diese Größen durch geeignete Auswahl der Darstellung unter lauter gleichberechtigten Darstellungen (oder, was dasselbe ist, durch Ausübung einer affinen Transformation auf die einmal gewählte Darstellung) innerhalb weiter Grenzen beliebig variiert werden können.

Auf der anderen Seite sagt uns unser Gefühl und die Beurteilung der Farben, die wir aus dem täglichen Leben mit-

bringen, daß unsere bisherige Auffassung noch sehr unvollständig ist, daß es noch mancherlei *Beziehungen zwischen Farben* gibt, die ihrerseits noch kein *geometrisches Korrelat* in unserem Vektorraum gefunden haben, sondern von uns völlig unbeachtet geblieben sind. Wir können aus unserer Darstellung durchaus nicht ablesen, welche von zwei Farben verschiedener Reizart heller, welche dunkler ist. Das Längenverhältnis der Vektoren hat damit zunächst nichts zu tun, denn dreien Farben, als Eichfarben, dürfen wir drei ganz beliebige Vektoren zuweisen, z. B. auch einer sehr hellen einen ganz kurzen Vektor und gleichzeitig einer viel dunkleren einen sehr langen. Aus ähnlichen Gründen dürfen wir aus dem Abstand zweier Farbpunkte niemals einen Schluß auf den Grad der Verschiedenheit der betreffenden Farben ziehen; und doch wissen wir, daß Urteile über die relative Größe des Unterschiedes bei verschiedenen Farbenpaaren („diese Farbstufe ist sehr viel größer als jene“) mindestens in extremen Fällen mit aller Entschiedenheit und Sicherheit gefällt werden.

Daß all dies aus dem Rahmen unserer bisherigen Entwicklungen herausfällt, kann uns nicht wundern, weil uns ja eben bisher zwei Farben nur entweder gleich oder ungleich waren und wir uns weder um den Grad der Ungleichheit noch etwa um irgendwelche „spezifische“ Gleichheit („im Farbton“, „in der Sättigung“, „in der Helligkeit“) gekümmert haben. Der Gedanke, der im folgenden durchgeführt werden soll, ist der, daß alle Begriffsbildungen dieser Art gewonnen und quantitativ festgelegt werden können ausschließlich aus der in der Einleitung des ersten Teiles besprochenen Einstellung auf größte Ähnlichkeit. Die dort erwähnte Einstellung b) auf Ebenunterscheidbarkeit dient dabei zur Verankerung der, übrigens sehr allgemeinen, Hypothese im Experiment.

Ein sehr naheliegender Versuch, Begriffe, wie Helligkeitsverhältnis, Farbverschiedenheit und ähnliches quantitativ festzulegen, wäre der, daß man sich denkt, unter den vielen affin-geometrisch gleichwertigen Darstellungen sei doch eine ausgezeichnet, und zwar eben dadurch, daß das Längenverhältnis, der (gewöhnliche euklidische) Abstand der Farbpunkte und ähnliches, jene Bedeutung wirklich erhalten, die ihnen zu geben wir unwillkürlich uns versucht fühlen. Eine derartige Deutung wäre als sehr spezieller Fall in dem allgemeinen Ansatz, den

wir machen werden, enthalten, erweist sich übrigens auf den ersten Blick als unmöglich, und zwar wegen des, im großen und ganzen gültigen, Fechnerschen Gesetzes für reine Intensitätsänderungen. Betrachten wir zwei Farben

$$A \quad (1 + \epsilon) A,$$

wo  $\epsilon$  so groß gewählt ist, daß die Farben vollkommen deutlich unterscheidbar sind, während sie es bei, sagen wir, 10 mal kleinerem  $\epsilon$  durchaus nicht wären. Dann werden die Farben

$$10 A \quad (10 + \epsilon) A$$

ununterscheidbar sein. Der euklidische Abstand der Vektorspitzen ist aber für beide Farbenpaare der gleiche, wie immer man die Vektordarstellung im übrigen spezialisieren mag. Man wird sich nicht gern entschließen, zwei Farbstufen als gleich zu bezeichnen, deren eine vollkommen deutlich ist, während die andere unter der Schwelle der Erkennbarkeit liegt.

## § 2. Maß der Verschiedenheit. Das Linienelement des Farbenraums.

Wenn wir ein Maß der Verschiedenheit zweier beliebiger Farben  $X$  (Koordinaten  $x_1, x_2, x_3$ ) und  $Y$  (Koordinaten  $y_1, y_2, y_3$ ) besäßen, d. h. eine Funktion

$$s(x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3),$$

welche diese Verschiedenheit bestimmt, so wäre klar, daß die *Einstellung auf größte Ähnlichkeit* darin bestehen müßte, die Funktion  $s$  unter gewissen, durch die Versuchsanordnung gesetzten Nebenbedingungen für die Farben  $X$  und  $Y$  (z. B.  $X$  fest,  $Y$  in bestimmter Weise veränderlich) zu einem relativen Minimum zu machen. Das liegt in den Begriffen und bedeutet keine besondere Annahme.

Die allgemeine Hypothese, die wir nun mit Helmholtz einführen, betrifft das Maß des Unterschiedes, und zwar das Maß des Unterschiedes für nahe benachbarte Farben. Wir nehmen an

1. daß für

$$y_1 = x_1 + d x_1, \quad y_2 = x_2 + d x_2, \quad y_3 = x_3 + d x_3$$

das Quadrat von  $s$ , wofür wir dann passend  $d s^2$  schreiben, eine quadratische Form der Koordinatendifferentiale ist

$$(1) \quad d s^2 = \sum_1^3 \sum_1^3 a_{ik} dx_i dx_k \quad a_{ik} = a_{ki},$$

wobei die  $a_{ik}$  gewisse Funktionen von  $x_1, x_2, x_3$  bedeuten;

2. daß für je zwei *eben unterscheidbare* Farben die  $dx$ , (daher auch  $ds$ ) als Differentiale angesehen werden dürfen (d. h. die  $a_{ik}$  nicht merklich variieren) und daß  $ds$  für jedes solche Farbenpaar denselben Wert hat.

Der Wert, welchen man dem  $ds$  für ein solches Farbenpaar beilegt, ist belanglos und bedeutet nur eine Normierung. Am besten denkt man zunächst eine Standardfarbe gewählt und definiert  $ds$  für die ebenmerkliche Intensitätssteigerung dieser Standardfarbe, als den hierfür nötigen *relativen Intensitätszuwachs*. Wegen des (gewöhnlichen) Fechnerschen Gesetzes, das bekanntlich für einen großen Teil des Farbenraumes gültig ist<sup>1)</sup>, stellt sich dann heraus, daß die genaue Angabe der Standardfarbe unnötig ist, wenn sie nur in jenem Bereich gewählt wird. (Ich sprach von der Standardfarbe nur darum, um zu zeigen, daß die *allgemeine* Theorie von der Gültigkeit des Fechnerschen Gesetzes ganz unabhängig ist; wäre es ungültig, so müßte man eben die Standardfarbe *genau* angeben; man hätte übrigens auch  $ds$  für ebenunterscheidbare Farben  $= 1$  setzen können und damit nur alle späteren Formeln mit einem konstanten Proportionalitätsfaktor behaftet.)

Die *wesentliche* Annahme ist natürlich die zweite. Die erste mußte sich daraus streng genommen auf Grund der Messungen der Unterschiedsempfindlichkeit experimentell ergeben. Ich glaube kaum, daß die Messungen je widersprechen werden. Etwas anderes als die geradzahlige Wurzel aus einer Form von der betreffenden geradzahligen Ordnung ist aus handgreiflichen Gründen unmöglich (Zeichenumkehr aller Differenziale muß  $ds$  in allen Fällen ungeändert lassen).

Bekanntlich ist durch den Ansatz (1) eine *Metrik*, im allgemeinen Sinne von Bernhard Riemann, für die Mannigfaltigkeit von Zahlentripeln  $(x_1, x_2, x_3)$  vollkommen festgelegt, wenn man  $ds$  als *Linielement* dieser Mannigfaltigkeit faßt. Wir können also jetzt und erst jetzt von einer eigentlichen Metrik des Farbenraumes sprechen. Seiner allgemeinen Form nach ist der Ansatz invariant nicht nur gegen die früher betrachteten linearen, sondern gegen ganz beliebige Trans-

1) A. König und E. Brodhun, Sitzungsber. d. Berliner Akad. d. Wiss. Juli 1888. S. 917; Juni 1889, S. 641.

formationen der  $x_i$ ; aber natürlich verändern dabei die  $a_{ik}$  ihre Form, und zwar in wohlbekannter Weise. Der *allgemeine* Ansatz gilt also für jedes System von Eichwerten; sobald wir dagegen ein spezielles Funktionensystem  $a_{ik}$  ausprobieren wollen, müssen wir das für ein ganz bestimmtes System, d. h. für ein ganz bestimmtes Tripel von Grundfarben tun; natürlich werden wir erwarten und hoffen, daß das Linienelement die einfachste Gestalt annehmen wird für die „wahren“ Grundfarben, zu denen wir im ersten Teil auf ganz andere Weise gelangt sind.

Für viele Zwecke, nämlich immer dann, wenn es sich nur um den Vergleich *sehr ähnlicher Farben* handelt, finden wir mit dem Helmholtzschen differenziellen Ansatz das Auslangen. Für andere Zwecke, insbesondere für die „stark heterochrome“ Photometrie, benötigen wir das Verschiedenheitsmaß  $s$  auch für endlich verschiedene Farben. Nun ist zu beachten, daß  $ds$  nach (1) zwar eine homogene Funktion ersten Grades der  $dx_i$  ist, aber nicht das Differenzial einer bestimmten Koordinatenfunktion. Dennoch gibt es nur *eine* konsequente, ja wohl überhaupt nur eine mögliche Verallgemeinerung des Helmholtzschen Verschiedenheitsmaßes, wenn man nicht die Aufstellung eines solchen Maßes für stark verschiedene Farben überhaupt für unmöglich erklären will. Es ist die folgende Annahme

3. die Verschiedenheit beliebiger Farben wird nach der Größe von

$$\int ds,$$

genommen für die kürzeste Verbindungslinie (geodätische Linie) zwischen den beiden Farbpunkten in der nach (1) vermessenen Mannigfaltigkeit, beurteilt.

Es braucht kaum erwähnt zu werden, daß dabei als kürzeste Verbindungslinie nicht etwa die gerade Linie im Vektorenraum, sondern jene Kurve zu verstehen ist, für welche jenes Integral den kleinsten Wert annimmt.

Anschaulich kolorimetrisch gesprochen kommt unsere Annahme 3, unter Rücksicht auf die Annahme 2, darauf hinaus: zwei Farben werden für um so ähnlicher erklärt, mit je weniger ebenunterscheidbaren Zwischenstufen man den kontinuierlichen Übergang von der einen zur anderen bewerkstelligen

kann, wenn man die Zwischenstufen für diesen Zweck so geschickt wie möglich wählt.

Für die anschauliche Vorstellung dürfen wir übrigens den im ersten Teil benützten Vektorenraum beibehalten, ja wir dürfen ihn sogar beliebig spezialisieren, wenn man sich nur vor Augen hält, daß Begriffe wie Länge einer Kurve, Senkrechtstehen (oder überhaupt Winkel) zweier von einem Punkt ausgehenden Richtungen u. dergl. *nicht* nach der unmittelbaren Anschauung, sondern nach Riemanns Geometrie beurteilt werden müssen. Dann dürfen wir sogar *ganz beliebige* Transformationen mit den Koordinaten vornehmen, wie sie in der Folge sich nützlich erweisen werden.

Die anschauliche Fassung unserer drei Annahmen, wenn wir von vornherein „gleichweit“ und „gleichstark verschieden“ identifizieren, ist diese:

Als gleichweit entfernt von irgendeinem Farbpunkt  $F$  gelten die Farbpunkte, die von ihm ebenunterscheidbar sind (Annahme 2). Sie liegen auf einem kleinen Ellipsoid mit dem Mittelpunkt  $F$  (Annahme 1). Alle Durchmesser aller dieser kleinen Ellipsoide gelten als gleichlang (Annahme 2). Weitere Flächen gleichen Abstandes um  $F$  erhält man für *kleine* Abstände dadurch, daß man alle Durchmesser des ersten Ellipsoides, das wir „Streuungsellipsoid“ nennen wollen, in demselben Verhältnis vergrößert, es sind also zu ihm ähnliche, ähnlich liegende Ellipsoide; das Abstandsverhältnis ist das Vergrößerungsverhältnis (Annahme 1). Diese Euklidische Konstruktion gilt aber streng nur im Unendlichkleinen. Um Flächen von gleichem *endlichen* Abstand um  $F$  zu konstruieren, hat man die Durchmesser des Streuungsellipsoides nicht in *ihrer Richtung* (im Euklidischen Sinn) proportional zu vergrößern, sondern man muß in *geradester Richtung* im Riemannschen Sinn, d. h. auf einer Geodätischen fortschreiten um gleiche Beträge des Linienintegrals  $\int ds$ , welches dann den Abstand mißt (Annahme 3).

Wir werden nun aus diesen Annahmen zunächst einige allgemeine Folgerungen ziehen, ohne noch die Koeffizienten  $a_{ik}$  zu spezialisieren. Sodann werden wir ein spezielles Linienelement vorschlagen und näher untersuchen, das, obwohl sicher nicht *genau* zutreffend, doch bei größter Einfachheit die beste Annäherung an die Wirklichkeit bilden dürfte.

### § 3. Begriff der Helligkeit.

Die Möglichkeit, *stark* verschiedene Farben gegeneinander zu photometrieren, wird von vielen geleugnet. Dagegen unterliegt es keinem Zweifel, daß man zwei Farben, die sich in der Reizart (d. h. nach dem Sprachgebrauch: in Farbton, und Sättigung) nur *wenig* unterscheiden, auf gleiche Helligkeit bringen kann dadurch, daß man die objektive Intensität der einen Farbe geeignet abändert. An diesen „fast monochromen“ Helligkeitsvergleich, der auch in der experimentellen Methodik immer mehr die Oberhand zu gewinnen scheint, knüpfen wir unseren Begriff der Helligkeit. Wir fassen ihn natürlich auf als eine Einstellung auf größte Ähnlichkeit.

Seien  $OF$  und  $OF'$  (Fig 1) die Richtungen zweier nahe benachbarter Farbvektoren,  $F$  ein *fester* Punkt auf der einen,  $F'$  ein *variabler* Punkt auf der anderen. Um diejenige Lage von  $F'$  zu finden, die dem Punkt  $F$  am nächsten liegt, haben wir um  $F$  ein Ellipsoid gleichen Abstandes in solcher Größe zu zeichnen, daß die Gerade  $OF''$  es gerade berührt. Der Berührungspunkt  $F''$  ist die ausgezeichnete Farbe, auf die eingestellt wird; d. h. nach dem Sprachgebrauch, den wir hiermit zu dem unseren machen wollen:  $F''$  ist mit  $F$  *gleich hell*. Führen wir die gleiche Konstruktion für alle möglichen, der Richtung  $OF$  benachbarten Richtungen aus, so erfüllen die gleichhellen Punkte  $F''$  ein Flächenelement, wir wollen es kurz als das „gleichhelle Flächenelement“ in  $F$  bezeichnen. Da man den Tangentenkegel von  $O$  an eines der kleinen Ellipsoide als Zylinder mit der Achse  $OF$  auffassen darf, so ist das gleichhelle Flächenelement einfach die zu  $OF$  konjugierte Durchmesser-ebene des Ellipsoids. Nun ist die Gleichung der Ellipsoide<sup>1)</sup>

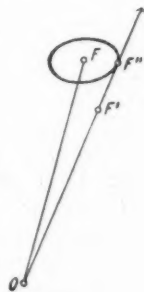


Fig. 1.

$$(2) \quad a_{ik} d x_i d x_k = \text{const.}$$

Seien die Koordinaten von  $F \dots x_1 x_2 x_3$ , von  $F'' \dots x_1 + d x_1, x_2 + d x_2, x_3 + d x_3$ , so ist die Fortschreitungs-

1) Wir lassen, wie es üblich geworden ist, die Summenzeichen von nun an fort. Über doppelt auftretende allgemeine Indizes ist stets von 1–3 zu summieren!

richtung  $OF$  im Punkte  $F$ , sagen wir  $\delta x_1, \delta x_2, \delta x_3$  (die reine Intensitätsänderung), bestimmt durch

$$\delta x_1 : \delta x_2 : \delta x_3 = x_1 : x_2 : x_3.$$

Die  $\delta x_2$  genügen der Gleichung der zu dieser Richtung bezüglich der Ellipsoide (2) konjugierten Durchmesserebene, also

$$(3) \quad a_{ik} x_i \delta x_k = 0;$$

das ist die Differentialgleichung des gleichhellen Flächenelementes im Punkt  $x_1 x_2 x_3$ . Im Sinne der Riemanngeometrie steht es auf der Richtung  $OF$  im Punkt  $F$  senkrecht.

Soll nun der Begriff der Helligkeit überhaupt einen Sinn haben, so wird man verlangen müssen, daß zwei Farben, die mit einer dritten gleichhell sind, es auch untereinander sein müssen. Das kann man zu folgender Konstruktion benützen. Man schreite von  $F$  aus auf dem gleichhellen Flächenelement in einer beliebigen Richtung um ein kleines Stück fort, bis zu einem Punkt  $G$ ; von da auf dem *durch  $G$  gelegten* gleichhellen Flächenelement wieder in beliebiger Richtung bis  $H$  usw. Man erhält so entlang einer Kurve, die übrigens auch beliebige Knicke aufweisen darf, einen *gleichhellen Streifen*. Nun richte man die Sache so ein, daß man nach Zurücklegung eines gewissen Weges wieder auf einen Punkt von  $OF$  stößt, sagen wir  $K$ . Man wird verlangen müssen, daß  $K$  mit  $F$  übereinstimmt; wenn der Begriff der Helligkeit einen Sinn haben soll. Wenn das nun für jeden beliebigen Weg gelten soll, so müssen sich die Flächenelemente (3) zu Integralflächen zusammenfassen lassen, auf denen dann die früher betrachteten gleichhellen Streifen verlaufen. Der Pfaffsche Differentialausdruck auf der linken Seite muß also integrabel sein, er muß einen Multiplikator  $\mu(x_1, x_2, x_3)$  zulassen, derart, daß

$$\frac{\partial \mu a_{ik} x_i}{\partial x_l} = \frac{\partial \mu a_{il} x_i}{\partial x_k} \quad \text{für} \quad \begin{matrix} k, l = 1, 2, 3 \\ k \neq l. \end{matrix}$$

Das ist nun für ganz beliebige Funktionen  $a_{ik}$  bekanntlich keineswegs der Fall, sondern nur, wenn die  $a_{ik}$  einer gewissen Bedingung genügen. Es muß nämlich

$$\mu \cdot \left( \frac{\partial a_{ik} x_i}{\partial x_l} - \frac{\partial a_{il} x_i}{\partial x_k} \right) = - \left( a_{ik} x_i \frac{\partial \mu}{\partial x_l} - a_{il} x_i \frac{\partial \mu}{\partial x_k} \right).$$

Multipliziert man jede der drei Gleichungen dieser Art, die sich für die drei Kombinationen  $(k, l)$  ergeben, mit  $a_{om} x_p$ ,



wo  $m$  der dritte Index, und addiert, so kommt rechts identisch Null. Es muß also

$$\sum_{(klm)} a_{pm} x_p \left( \frac{\partial a_{ik} x_i}{\partial x_l} - \frac{\partial a_{il} x_l}{\partial x_k} \right) = 0.$$

Das eigenartige Summenzeichen soll andeuten, daß außer den beiden, nach Übereinkunft nicht angezeigten Summationen über die Indizes  $i$  und  $p$ , das Indextripel  $(k, l, m)$  die drei Wertekombinationen  $(1, 2, 3)$ ,  $(2, 3, 1)$   $(3, 1, 2)$  zu durchlaufen hat. Die Relation läßt sich noch etwas vereinfachen, da wegen  $a_{ik} = a_{ki}$  gilt

$$\frac{\partial a_{il} x_l}{\partial x_i} - \frac{\partial a_{il} x_l}{\partial x_k} = x_i \left( \frac{\partial a_{il}}{\partial x_l} - \frac{\partial a_{il}}{\partial x_k} \right).$$

Daher

$$(4) \quad \sum_{(klm)} a_{pm} \left( \frac{\partial a_{il}}{\partial x_l} - \frac{\partial a_{il}}{\partial x_k} \right) x_i x_p = 0.$$

Diese Bedingung ist *notwendig* für die Integrabilität von (3), es kann übrigens gezeigt werden, daß sie dafür auch *hinreicht*.<sup>1)</sup>

Nun sind die  $a_{ik}$  nach unserer Annahme durch Messungen der Unterschiedsempfindlichkeit prinzipiell empirisch bestimmbare Koordinatenfunktionen und es wäre ganz wohl denkbar, daß sie der Differentialgleichung (4) *nicht* genügen. In diesem Falle hätte der Begriff der Helligkeit überhaupt keine quantitativ faßbare Bedeutung. Ob er sie hat, kann nur durch das Experiment entschieden werden, am besten wohl so, daß man in sich geschlossene Farbzykeln, die in kleinen Stufen fortschreiten, durchphotometriert und nachsieht, ob sich als Produkt aller aufeinanderfolgender Helligkeitsverhältnisse 1 ergibt, oder bei öfterer Wiederholung des Versuches eine systematische Abweichung von der Einheit. Daß in letzterem Falle der Begriff der Helligkeit als sinnlos aufgegeben werden müßte, ist übrigens unabhängig von aller Theorie einleuchtend.

Die große Unklarheit, die über diesen Begriff in der Literatur herrscht, könnte wohl den Verdacht erwecken, daß der zweite Fall in der Natur zutrifft. Glücklicherweise sind gerade während der Niederschrift dieser Abhandlung am hiesigen Institut Helligkeitsmessungen von der beschriebenen Art an Zykeln Ostwaldscher Farbtäfelchen ausgeführt worden, die-

1) A. R. Forsyth, Theorie der Differentialgleichungen, Deutsche Ausgabe (Leipzig, Teubner, 1893), I. Teil, S. 7ff.

demnächst von anderer Seite veröffentlicht werden und die Integrabilität von (3) mit sehr großer Annäherung sicherstellen. Wir werden sie im folgenden als exakt erfüllt ansehen, halten aber die Feststellung für wichtig, daß es sich hier um ein rein empirisches Resultat handelt, und daß die Sache unter anderen Verhältnissen, z. B. im parazentralen Sehen und bei Einmischung des Purkinjephänomens möglicherweise anders liegen kann.

Es gibt dann also bei geeigneter Wahl des Multiplikators  $\mu(x_1, x_2, x_3)$  eine Funktion  $h(x_1, x_2, x_3)$ , für welche

$$(5) \quad \frac{\partial h}{\partial x_k} = \mu a_{ik} x_i \quad h = 1, 2, 3$$

Beim Fortschreiten auf den Flächen

$$h = \text{const.}$$

die den Farbenraum zwiebelschalenartig zerlegen, ist (3) erfüllt, die Flächen sind Orthogonalflächen (im Riemanngeometrischen Sinne) der vom Ursprung aus gezogenen Farbvektoren. Wir werden sie als Flächen gleicher Helligkeit oder *Isolychnen* und  $h$  als ein vorläufiges Maß der Helligkeit bezeichnen.

$h$  ist aber durch (5) noch keineswegs bestimmt. Jede eindeutige Funktion von  $h$  stellt dieselbe Flächenschar dar und ist als Maß der Helligkeit von vornherein gleichberechtigt. Es ist also eine Normierung nötig. Die Normierung gestaltet sich nur dann einfach, wenn wir annehmen dürfen, daß die Isolychnen im Vektorraum ähnlich und ähnlichliegend sind (im elementargeometrischen Sinne) bezüglich des Ursprungs. Experimentell bedeutet das, daß auch die Helligkeitsgleichheit (ebenso wie die Farbgleichungen) bei proportionaler Veränderung der objektiven Intensität beider Lichtgemische erhalten bleibt. Wir sind uns bewußt, daß diese Permanenz aus der Permanenz der Farbgleichungen *keineswegs folgt*, glauben sie aber dennoch auf Grund allgemeiner Erfahrung mindestens als *Näherung* annehmen zu dürfen, trotz des widersprechenden Befundes von A. König<sup>1)</sup>, der mindestens zum

1) A. König, Beiträge zur Psychologie und Physiologie der Sinnesorgane (Helmholtz-Festschrift), S. 309, 1891; vgl. auch F. Allen, Phil. Mag. 38, S. 81, 1919.

Teil auf dem Purkinjeschen Phänomen beruhen dürfte (vgl. jedoch unten S. 519).

Man kann dann den Helligkeitsparameter  $h$  so normieren, daß er proportional wird dem Abschnitt der Isolychne auf irgendeinem Farbvektor (weil diese Abschnitte eben von Isolychne zu Isolychne für alle Farben proportional variieren). Experimentell bedeutet das, daß man übereinkommt, eine von 2, 3, 4 Glühlampen beschienene Fläche als 2, 3, 4 mal so hell zu bezeichnen.<sup>1)</sup> Rechnerisch bedeutet es, daß  $h$  eine homogene Funktion ersten Grades der Koordinaten sein soll. Man hat dann noch dem Eulerschen Satz über homogene Funktionen

$$h = x_1 \frac{\partial h}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial h}{\partial x_2} + x_3 \frac{\partial h}{\partial x_3} = x_k \frac{\partial h}{\partial x_k},$$

also nach (5)

$$h = \mu \cdot a_{ik} x_i x_k; \quad \mu = \frac{h}{a_{ik} x_i x_k}.$$

In (5) eingesetzt

$$(6) \quad \frac{\partial \lg h}{\partial x_l} = \frac{\sum_i a_{il} x_i}{\sum_i \sum_k a_{ik} x_i x_k} \quad l = 1, 2, 3.$$

Diese drei Gleichungen bestimmen  $\lg h$  bis auf eine additive Konstante,  $h$  also bis auf einen belanglosen Proportionalitätsfaktor.

#### § 4. Spezieller Ansatz für das Linienelement.

Um die folgenden Rechnungen nicht allzusehr zu komplizieren, wollen wir sie sogleich für das spezielle Linienelement durchführen, das ich in Vorschlag bringe und für eine gute Annäherung in einem großen Gebiete des Farbenraumes halte. Das sicherste wäre natürlich, die  $a_{ik}$  im ganzen Farbenraum experimentell zu bestimmen durch Messung der Unterschiedsempfindlichkeit für alle möglichen Abwandlungsrichtungen jeder Farbe; und dann erst, mit den experimentell bestimmten Koeffizienten, die Theorie der ähnlichsten Farbe, von der die vorstehende Helligkeitstheorie nur ein Spezialfall, an den verschiedensten Anordnungen durchzuprüfen. Leider ist dieser Weg in seiner Vollständigkeit experimentell hoffnungslos

1) Beim gebräuchlichen Helligkeitsvergleich mit dem Nicol wird die Möglichkeit einer solchen Fassung des Begriffes der Helligkeit stillschweigend vorausgesetzt.

schwierig. Experimentell ist das Linienelement bisher nur längs einiger Farbvektoren<sup>1)</sup>, dann längs gewisser Kurven<sup>2)</sup> auf dem Spektralkegel ausgemessen worden. Messungen vom Spektralkegel gegen Weiß zu (Empfindlichkeit für „Sättigungsänderung“) fehlen fast völlig, es liegen in dieser Richtung nur einige Messungen von M. Gottlieb<sup>3)</sup> vor (nicht an Spektralfarben, sondern an Pigmenten). Viel Material läßt sich gewiß aus dem prachtvollen Ostwaldschen Farbatlas schöpfen, nur sind diese Farben hinsichtlich ihrer Koordinaten nicht definiert und ihre genaue Bestimmung erfordert viel Mühe.

Es bleibt also nichts übrig als versuchsweise einen Ansatz für das Linienelement zu machen, der den hauptsächlichsten Anforderungen genügt, und diesen Ansatz dann im Detail durchzuprüfen an Messungen der Unterschiedsempfindlichkeit einerseits und an ähnlichsten Farbeinstellungen andererseits.

H. v. Helmholtz hat auf Grund gewisser, an das Fechner'sche Gesetz anknüpfenden Überlegungen folgenden Ansatz versucht, der gelten sollte, wenn die  $x_i$  auf die wahren Grundfarben bezogen sind:

$$(7) \quad a_{ik} = 0 \quad \text{für} \quad i \neq k; \quad a_{ii} = \frac{1}{3 x_i^2},$$

d. h.

$$(8) \quad ds^2 = \frac{1}{3} \left( \frac{dx_1^2}{x_1^2} + \frac{dx_2^2}{x_2^2} + \frac{dx_3^2}{x_3^2} \right).$$

Dieser Ansatz hat sich schon insofern nicht bewährt, als er die Königschen Messungen der Farbunterschiedsschwelle im Spektrum nicht wiederzugeben vermochte, wenn man unter den  $x_i$  die Koordinaten bezüglich der Fehlfarben der Dichromaten verstand. Es mußten neue Grundfarben ad hoc berechnet werden, um das Linienelement für ebenunterscheidbare Farbenpaare einigermaßen konstant zu machen; die einfache Auffassung der Dichromasie, die wir im § 10 des ersten Teils dargelegt haben, wird damit über den Haufen geworfen.

Das Linienelement (8) führt aber auch — was Helmholtz nicht bemerkt zu haben scheint — zu einer ganz un-

1) A. König u. E. Bradhun, Sitzungsber. d. Berliner Akad. d. Wiss. Juli 1888, S. 917 u. Juni 1889, S. 641.

2) A. König u. C. Dieterici, Ann. d. Phys. **22**, S. 579. 1884; Uhthoff, Gräfes Archiv **34** (4), S. 1; F. Exner, Wiener Ber. (2a) **111**, S. 857. 1902; O. Steindler, Wiener Ber. (2a) **115**, S. 39. 1906.

3) M. Gottlieb, Wiener Ber. (2a) **126**, S. 1299. 1917.

möglichen Helligkeitsfunktion; es ist also für sich allein, ganz ohne Beziehung zur Theorie der Dichromasie, mit der Erfahrung im Widerspruch. Daß die Integrabilitätsbedingung und die Homogenitätsannahme des vorigen Paragraphen erfüllt sind, davon überzeugt man sich leicht. Nun ergibt (6) mit den speziellen Werten (7) der  $a_{ik}$

$$\frac{\partial \lg h}{\partial x_i} = \frac{1}{3x_i} \quad l = 1, 2, 3,$$

also

$$h = \text{const.} \cdot \sqrt[3]{x_1 x_2 x_3}.$$

Diese Helligkeitsfunktion ist aber ganz unmöglich, da sich z. B. für die Helligkeitsverteilung im Sonnenspektrum ein scheußlicher Kamelrücken mit zwei ausgeprägten Maximis ergibt, und zwar sowohl für die Königschen, aus der einfachen Dichromatentheorie abgeleiteten, als auch für die von Helmholtz ad hoc umgerechneten Grundempfindungswerten. Aber noch aus einem allgemeineren Grunde ist diese Helligkeitsfunktion, mithin dieses Linienelement unannehmbar.

Es ist in letzter Zeit, namentlich durch Versuche von W. Abney<sup>1)</sup>, dann von F. Exner<sup>2)</sup> und von K. W. F. Kohlrausch<sup>3)</sup> bewiesen worden, daß die Helligkeit, jedenfalls sehr angenähert, eine additive Eigenschaft der Farben ist, d. h. daß gleichhelle Lichter gemischt, gleichhelle Lichter ergeben. Diese Additivität der Helligkeit folgt keineswegs aus der

1) W. Abney, Phil. Trans. A. 1899; *ibid.* 205. S. 333. 1906. Da Abney, im Gegensatz zu Exner und Kohlrausch, „stark heterochrom“ photometriert (vgl. unten § 7), sind seine Ergebnisse, von unserem im § 3 vertretenen Standpunkt aus, nicht von so grundlegender Bedeutung wie die der beiden anderen Forscher. Bei dieser Gelegenheit will ich auch begründen, warum ich von den vielen, schönen Ergebnissen der geistvollen *Flimmermethode* hier, wo es sich um Klarstellung der Grundbegriffe handelt, nirgends Gebrauch mache: weil meines Erachtens erst feststehen muß, was *Helligkeit* ist, dann kann man empirisch feststellen, daß und wie sie sich aus diesen theoretisch höchst verwickelten Nachbildversuchen richtig berechnen läßt, und dann darf man die Methode für theoretische Zwecke einwandfrei verwenden.

2) F. Exner, Wiener Ber. (2a) 127. S. 1829. 1918; *ibid.* 129. 1920 (im Druck).

3) K. W. F. Kohlrausch, Mitteilungen des techn. Versuchsamtes in Wien, 9. Jahrg. 1920 (im Druck).

Additivität der Farbgleichungen, sie wurde sogar von Helmholtz, dem die letztere vollkommen feststand, bezweifelt, und zwar auf Grund einiger sehr interessanter Versuche am Farbenkreisel, auf die wir im § 6 näher zurückkommen. Dort werden wir zeigen, daß diese Versuche von Helmholtz falsch gedeutet wurden und in Wahrheit mit der Additivität der Helligkeit *nicht* im Widerspruch stehen. Wir werden letztere also auf der Suche nach dem richtigen Linienelement mit als Führer benützen. Unsere Darstellungsweise hat ja den Vorteil, daß wir uns damit in keiner Weise festlegen, sondern schlimmstenfalls nur eine gewisse Näherung an die Wirklichkeit erreichen, die später immer verbessert werden kann.

Soll nun

$$(9) \quad \begin{cases} h(x_1, x_2, x_3) + h(x_1', x_2', x_3') \\ = h(x_1 + x_1', x_2 + x_2', x_3 + x_3') \end{cases}$$

als Identität gelten für irgend zwei Wertetripel  $x_i$  und  $x_i'$ , so folgt durch Differentiation nach  $x_l$

$$\frac{\partial h}{\partial x_l}(x_1, x_2, x_3) = \frac{\partial h}{\partial x_l}(x_1 + x_1', x_2 + x_2', x_3 + x_3') \quad l = 1, 2, 3$$

und da  $x_i$  und  $x_i + x_i'$  wiederum zwei beliebige Wertetripel sind, so müssen die drei partiellen Differentialquotienten  $\partial h / \partial x_l$  Konstante sein.  $h$  muß also die Form haben

$$(10) \quad h = a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3,$$

homogen linear, damit auch die integrale Forderung (9) erfüllt bleibe. Diese Form wird, beiläufig bemerkt, durch eine lineare Transformation nicht geändert, gilt also für beliebige Eichfarben.

Um mit der Erfahrung in Einklang zu sein, muß also unser Linienelement jedenfalls als *Isolychnen eine Ebenenschar*

$$(11) \quad a x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 = \text{const}$$

ergeben; d. h. nach § 3, es muß so beschaffen sein, daß die Ebenen dieser Schar überall auf der Richtung des Radiusvektors ( $d x_1 : d x_2 : d x_3 = x_1 : x_2 : x_3$ ) senkrecht stehen (im Riemanngeometrischen Sinn). Nun verwandelt die Transformation

$$\xi_1 = \sqrt{a_1} x_1, \quad \xi_2 = \sqrt{a_2} x_2, \quad \xi_3 = \sqrt{a_3} x_3$$

Radienvektoren in Radienvektoren, die Ebenenschar (11) aber in die Kugelschar  $\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2 = \text{const.}$

Das im Raume der  $\xi_i$  euklidische Linienelement

$$4(d\xi_1^2 + d\xi_2^2 + d\xi_3^2) = \alpha_1 \frac{dx_1^2}{x_1} + \alpha_2 \frac{dx_2^2}{x_2} + \alpha_3 \frac{dx_3^2}{x_3} = ds^2$$

würde also unserer Forderung genügen.

Dieser einfachste Ansatz, auf den ich durch ein Aperçu von Hrn. W. Pauli jun. aufmerksam gemacht wurde, verbietet sich aber wegen des Fechnerschen Gesetzes. In der Tat, wenn man Farben gleicher Reizart, aber verschiedener Intensität nur in der Intensität variiert

$$dx_1 = \varepsilon x_1, \quad dx_2 = \varepsilon x_2, \quad dx_3 = \varepsilon x_3 \quad (\varepsilon \ll 1),$$

so würde sich

$$ds = \varepsilon \sqrt{\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3}$$

ergeben, also nicht konstant für konstantes  $\varepsilon$ , wie es das Fechnersche Gesetz verlangt, sondern für ein mit der Quadratwurzel aus der Helligkeit umgekehrt proportionales  $\varepsilon$ , was der Erfahrung widerspricht.

Wir brauchen aber deshalb den errungenen Vorteil richtiger Isolychnen nicht aufzugeben. Denn die Isolychnen ändern sich, wie man aus (3) erkennt, nicht, wenn dem Linienelement noch eine beliebige Koordinatenfunktion als Faktor hinzugefügt wird. Wählen wir für diesen Faktor die reziproke Helligkeit

$$\frac{1}{\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3},$$

so erhalten wir die Fechnerstufe konstant nicht nur bei gleicher Reizart, sondern für alle Farben überhaupt, wie es die Erfahrung für ein großes Gebiet des Farbenraumes zu verlangen scheint.

Auf Grund dieser Überlegungen möchten wir also folgendes Linienelement als das den Tatsachen wahrscheinlich am nächsten kommende vorschlagen:

$$(12) \quad \begin{cases} a_{ik} = 0, & i \neq k, \\ a_{ii} = \frac{\alpha_i}{x_i(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3)}, & \text{d. h.} \\ ds^2 = \frac{1}{\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3} \left( \frac{\alpha_1 dx_1^2}{x_1} + \frac{\alpha_2 dx_2^2}{x_2} + \frac{\alpha_3 dx_3^2}{x_3} \right), \end{cases}$$

worin die  $a_i$  gewisse, experimentell zu bestimmende Konstante, die so zu wählen sind, daß

$$h = a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3$$

die *Helligkeit* der Farbe ( $x_1, x_2, x_3$ ) mißt.

Dieses Linienelement liefert nach Konstruktion die eben angegebene, mit der Erfahrung übereinstimmende Helligkeitsfunktion und das gewöhnliche Fechnersche Intensitätsgesetz mit derselben Konstante für alle Farben.

Daß es nicht das einzig mögliche ist, das diesen Forderungen genügt, folgt schon daraus, daß es gegen lineare Transformation der  $x_i$  *nicht invariant* ist; jede Form, in die es durch eine solche Transformation übergeführt wird, wäre jedenfalls ebenso möglich.

*Wir nehmen an, daß die einfache Gestalt (12) für die wahren Grundfarben zutrifft, als die wir, vorläufig jedenfalls, die von König und Dieterici abgeleiteten ansehen.*

#### § 5. Farbunterschiedsempfindlichkeit im Spektrum.

Als erste weitere Erfahrungskontrolle suchen wir aus unserem Ansatz die Farbunterschiedsempfindlichkeit im Spektrum abzuleiten. Diese wird rationeller Weise stets unter Ausgleichung des Helligkeitsunterschiedes der verglichenen Spektralfarben gemessen, weil das Resultat sonst von der speziellen Intensitäts- oder Helligkeitsverteilung in dem benutzten Spektrum abhängt. Man schreitet von einer Stelle  $\lambda$  bis zu jener Nachbarstelle  $\lambda + d\lambda$  fort, welche von  $\lambda$  *auch dann noch*, und zwar eben noch, unterscheidbar ist, wenn man den Helligkeitsunterschied so gut wie möglich ausgleicht.

Sind also

$$x_i, \quad x_i + dx_i$$

die Koordinaten der ebenunterschiedenen Farbtöne  $\lambda, \lambda + d\lambda$ , wie sie im Spektrum sich vorfinden, so ist das Linienelement nicht zwischen diesen, sondern etwa zwischen

$$(1 + \varepsilon) x_i, \quad x_i + dx_i$$

gemessen. Der zum Helligkeitsausgleich erforderliche Wert von  $\varepsilon$  ergibt sich leicht zu  $d \lg h$ .



Es ist also

$$(13) \quad \begin{cases} ds^2 = a_{ik}(x_i d \lg h - dx_i)(x_k d \lg h - dx_k) \\ \quad = a_{ik} x_i x_k d \lg \frac{x_i}{h} d \lg \frac{x_k}{h} \end{cases}$$

Für unser Linienelement (12) also

$$(14) \quad ds^2 = \frac{\alpha_1 x_1}{h} \left( d \lg \frac{x_1}{h} \right)^2 + \frac{\alpha_2 x_2}{h} \left( d \lg \frac{x_2}{h} \right)^2 + \frac{\alpha_3 x_3}{h} \left( d \lg \frac{x_3}{h} \right)^2$$

mit

$$h = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3.$$

Hier haben wir  $h$  und die  $x_i$  als Funktionen von  $\lambda$  anzusehen; Ableitungen nach  $\lambda$  sollen durch einen Strich bezeichnet werden. Als für die Ziffernrechnung geeignete Form ergibt sich:

$$(15) \quad ds = \sqrt{\frac{\alpha_1 x_1}{h} \left( \frac{x_1'}{x_1} - \frac{h'}{h} \right)^2 + \frac{\alpha_2 x_2}{h} \left( \frac{x_2'}{x_2} - \frac{h'}{h} \right)^2 + \frac{\alpha_3 x_3}{h} \left( \frac{x_3'}{x_3} - \frac{h'}{h} \right)^2} \cdot d\lambda.$$

Als Zahlenmaterial benützen wir, wegen des Auftretens der Differentialquotienten, die aus empirischen Daten heikel zu bestimmen sind, die schon von Helmholtz<sup>1)</sup> zu demselben Zweck sorgfältig ausgeglichenen Werte. Helmholtz gibt aber die Werte  $r, g, v$  für die *Elementarfarben* Königs, wir müssen sie erst mit den Königschen Koeffizienten<sup>2)</sup> auf die Grundfarben umrechnen. Es ist vorteilhaft, dabei gleich die Multiplikation mit den Konstanten  $\alpha_i$  in die Umrechnung einzubeziehen; d. h. wir beziehen die  $x_i$  von nun an (und so auch in den folgenden Abschnitten) nicht auf solche Einheiten der Grundfarben, die, gemischt, Weiß ergeben, sondern auf solche, die *gleichhell* erscheinen bzw. in Mischungen gleichen Helligkeitswert haben. Die Helligkeitsfunktion wird dadurch

$$(10') \quad h = x_1 + x_2 + x_3,$$

das Linienelement im allgemeinen Fall

$$(12') \quad ds^2 = \frac{1}{h} \left( \frac{dx_1^2}{x_1} + \frac{dx_2^2}{x_2} + \frac{dx_3^2}{x_3} \right)$$

und in unserem jetzt behandelten Fall

$$(15') \quad ds = \sqrt{\frac{x_1'}{h} \left( \frac{x_1'}{x_1} - \frac{h'}{h} \right)^2 + \frac{x_2'}{h} \left( \frac{x_2'}{x_2} - \frac{h'}{h} \right)^2 + \frac{x_3'}{h} \left( \frac{x_3'}{x_3} - \frac{h'}{h} \right)^2} \cdot d\lambda.$$

1) H. v. Helmholtz, Zeitschr. f. Psychol. u. Physiol. d. Sinnesorgane 3. S. 1. 1891 (Tafel I).

2) A. König u. C. Dieterici, *ibid.* 4. S. 241. § 23. 1892.

Die  $a_i$ , von denen nur die Verhältnisse in Betracht kommen, verdanke ich\* der Freundlichkeit F. Exners, der jetzt eben Versuche darüber angestellt hat:

$$(16) \quad a_1 = 43 \cdot 33, \quad a_2 = 32 \cdot 76, \quad a_3 = 1.$$

Für die Umrechnung unserer neuen  $x_i$  aus den Elementarvalenzen  $r, g, v$  ergibt sich so

$$(17) \quad \begin{cases} x_1 = 45 \cdot 6 r - 6 \cdot 84 g + 4 \cdot 56 v, \\ x_2 = 6 \cdot 57 r + 26 \cdot 3 g, \\ x_3 = \phantom{45 \cdot 6 r - 6 \cdot 84 g + 4 \cdot 56 v} \phantom{6 \cdot 57 r + 26 \cdot 3 g} r. \end{cases}$$

Dieselben Formeln gelten natürlich für die gestrichenen Größen.

Für  $d\lambda$  endlich benütze ich die neueren experimentellen Resultate von Uthhoff.<sup>1)</sup>

Die beigegefügte Tabelle ist ohne weiteres verständlich.

Tabelle 1.

$\lambda$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$h$	$x_1'$	$x_2'$	$x_3'$	$h'$	1. 100 $\frac{ds}{d\lambda}$	2. $d\lambda$ beob.	3. 100 $ds$ ber.	4. $d\lambda$ ber.
640	119	23,3	—	142	-5,12	-1,37	—	- 6,49	0,586	2,97	1,74	1,81
630	176	40,2	—	216	-5,58	-2,01	—	- 7,59	0,712	1,68	1,20	1,49
620	236	64,5	—	301	-6,77	-3,10	—	- 9,87	0,793	1,24	0,98	1,34
610	286	100,5	—	387	-4,03	-3,93	—	- 7,96	1,100	1,08	1,11	0,96
600	317	144,1	—	461	-2,56	-4,87	—	- 7,43	1,194	1,02	1,20	0,89
590	340	198	—	538	-1,63	-5,91	—	- 7,54	1,207	0,91	1,10	0,88
580	354	259	—	613	-1,14	-5,62	—	- 6,76	0,915	0,88	0,81	1,16
570	359	324	—	683	-0,42	-5,50	—	- 5,92	0,789	1,10	0,87	1,34
560	359	364	0,22	723	+0,68	-2,63	—	- 1,95	0,456	—	—	2,33
550	339	375	0,30	714	+3,04	+0,45	-0,0138	+ 3,48	0,401	1,66	0,67	2,64
540	301	358	0,49	659	+4,83	+2,98	-0,0233	+ 7,79	0,420	—	—	2,58
530	230	315	0,75	546	+8,10	+4,98	-0,0326	+13,05	0,991	1,88	1,86*	1,07
520	158	255	1,10	414	+6,06	+7,12	-0,0400	+13,14	0,618	—	—	1,72
510	105	171	1,55	278	+5,28	+8,18	-0,0536	+13,41	0,632	1,29	0,83	1,68
500	55,7	97,2	2,2	155	+3,65	+5,17	-0,0887	+ 8,73	1,493	—	—	0,71
490	36,7	64,0	3,6	104	+0,97	+1,89	-0,208	+ 2,65	1,58	0,72	1,14	0,67
480	41,8	52,0	7,9	101	-0,60	+1,02	-0,52	- 0,10	—	0,95	—	—

Mittel 1,06

Die ersten neun Spalten geben das nach obiger Formel umgerechnete Helmholtzsche Zahlenmaterial, die letzten vier: 1.  $100 \times$  die ausgerechnete Quadratwurzel; 2. die Beob-

1) Uthhoff, Archiv f. Ophthalmol. **34** (4), S. 1; zitiert nach W. Nagel, Handbuch d. Physiologie des Menschen, III 1, S. 251 (Braunschweig, Vieweg, 1904).

achtungen Uhthoffs; 3. das Produkt beider, dieses sollte konstant sein; 4. das Mittel von Kolonne 3. dividiert durch Kolonne 1. als  $d\lambda$  berechnet.

Die Konstanz von  $ds$  ist sehr schlecht erfüllt, ungefähr ebenso schlecht wie bei Helmholtz. Trägt man sich jedoch die berechneten und beobachteten Werte von  $d\lambda$  graphisch auf (Fig. 2), so sieht man, daß der allgemeine Verlauf der Unterschiedsempfindlichkeit im Spektrum von der Theorie getroffen,

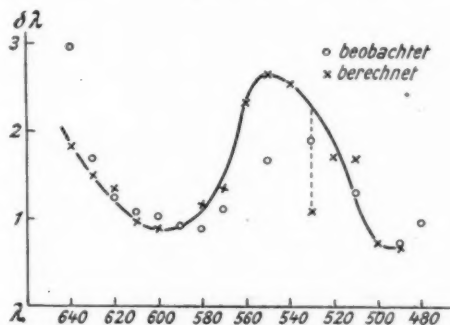


Fig. 2.

nur etwas übertrieben wird, wobei noch die Extremwerte gegen Rot verschoben erscheinen.

Ich will durchaus nicht behaupten, daß man aus dieser ungefähren Übereinstimmung ein starkes Argument zugunsten des vorgeschlagenen Linienelementes entnehmen kann. Aber ich glaube wirklich, daß man auch von einer vollkommen richtigen Theorie eine bessere nicht hätte erwarten können. Man bedenke, daß keine einzige zur Rechnung benützte Zahl ad hoc angenommen wurde, sondern daß dieselben dem heterogensten Beobachtungsmaterial entstammen (König, Uthoff, Exner); und ferner, daß die Lage der wahren Grundfarben noch keineswegs völlig sicher ist, wie wir am Ende des ersten Teiles dieser Abhandlung auseinandergesetzt haben. Auch ist insbesondere die Interpolation von Differentialquotienten (auf deren Wert es aber hier sehr entscheidend ankommt) aus Kurven von rein empirischem, ziemlich unregelmäßigem Verlaufe, wie es die Königschen sind, immer eine

gewagte und unsichere Sache. Welche Fehler dabei unterlaufen, erkennt man an der merkwürdigen Lage des *theoretischen* Punktes  $\lambda = 530$ , der, wie bei Helmholtz so auch nach meiner Rechnung, auch aus dem *theoretischen* Kurvenverlauf völlig herausfällt.

Als Mittel des  $d_s$  für eben unterscheidbaren Farben ergab sich sehr nahe 0,01 (vgl. Tab. 1, vorletzte Spalte). Diese Zahl sollte nach der Theorie mit der Fechnerschen Intensitätsstufe übereinstimmen. Leider ist der Vergleich kein scharfer, weil letztere von verschiedenen Beobachtern sehr verschieden angegeben wird, je nach der verwendeten Methode und wohl auch nach der Individualität des Beobachters. Den größten Wert gibt König mit  $\frac{1}{57}$ , von anderen Beobachtern führt von Kries in Nagels Handbuch der Physiologie (III. 1, S. 250) an: Arago  $\frac{1}{130}$ , Masson  $\frac{1}{120}$ , Volkmann  $\frac{1}{100}$ , Helmholtz  $\frac{1}{167}$ , Aubert  $\frac{1}{186}$ . Dem fügt sich unsere hier berechnete Zahl ( $\frac{1}{91}$ ) sehr gut ein.

§ 6. Die Farbscheibenversuche von Helmholtz, die der Helligkeitsadditivität zu widersprechen scheinen.

Wir wenden uns nun zu den schon erwähnten Farbscheibenversuchen von Helmholtz<sup>1)</sup>, aus denen dieser fälschlich auf das Nichtbestehen einer additiven Mischungsregel für die Helligkeit schloß. Sie liefern uns ein Beispiel für eine Einstellung auf ähnlichste Farbe, die *kein* gewöhnlicher Helligkeitsvergleich ist. Helmholtz hat das nicht erkannt, darin lag eben sein Irrtum.

Der Versuch verläuft folgendermaßen. Man erfüllt einen Farbenkreis, unter Aussparung des kleinen Winkels  $\varepsilon'$  (etwa  $\frac{1}{50}$  bis  $\frac{1}{100}$  des Vollwinkels), der zunächst lichtlos bleibt, mit einem Gemisch zweier Pigmentfarben  $F$  und  $V$ . Dieses Gemisch nennen wir den *Grund*  $G$ . Genauer, es sollen  $F$  bzw.  $V$  die Farben sein, die man erblickt, wenn man die ganzen  $2\pi - \varepsilon'$  mit dem ersten bzw. zweiten Pigment erfüllt und rotieren läßt,  $G$  die Farbe, wenn  $\lambda'$  mit dem ersten,  $\mu'$  mit dem zweiten erfüllt sind, wobei  $\lambda' + \mu' = 2\pi - \varepsilon'$ . Dann ist

$$(18) \quad G = \lambda F + \mu V: \quad \lambda + \mu = 1$$

$$\left[ \lambda = \frac{\lambda'}{2\pi - \varepsilon'}, \quad \mu = \frac{\mu'}{2\pi - \varepsilon'} \right]$$

1) H. v. Helmholtz, Zeitschr. f. Psychol. u. Phys. 2. S. 1. 1891.

$F$  soll das dunklere Pigment sein. — Nun wird auf einem inneren Ring der Winkel  $\varepsilon'$  auch noch mit  $F$  ausgefüllt, auf einem anstoßenden äußeren Ring wird nur ein Bruchteil des Winkels  $\varepsilon'$  mit  $V$  ausgefüllt, sagen wir der Winkel  $\zeta'$ , während  $\varepsilon' - \zeta'$  schwarz gedeckt bleibt.<sup>1)</sup> Nun wird  $\zeta'$  solange variiert, bis der Grenzkreis zwischen den beiden Ringen möglichst undeutlich, die beiden Farben also möglichst wenig unterscheidbar werden, was Helmholtz mit der Einstellung auf gleiche Helligkeit identifiziert. Nach ihm haben also die Farbzuwüchse

$$(19) \quad \frac{\varepsilon'}{2\pi - \varepsilon'} P = \varepsilon P'; \quad \frac{\zeta'}{2\pi - \varepsilon'} V = \zeta V'$$

$$\left[ \varepsilon = \frac{\varepsilon'}{2\pi - \varepsilon'}, \quad \zeta = \frac{\zeta'}{2\pi - \varepsilon'} \right]$$

zum Grunde  $G$  die Helligkeit gleichstark geändert. Wenn nun die Helligkeit eine additive Eigenschaft wäre, so müßten die Helligkeiten von  $F$  und  $V$  sich umgekehrt verhalten wie die Zuwüchse  $\varepsilon$  und  $\zeta$  oder die kleinen Winkel  $\varepsilon'$  und  $\zeta'$ :

$$(20) \quad \frac{h(F)}{h(V)} = \frac{\zeta}{\varepsilon} = \frac{\zeta'}{\varepsilon'}$$

und dieses Verhältnis müßte sich konstant ergeben, unabhängig von der Farbe des Grundes. Das ist nun nicht der Fall. Das Winkelverhältnis variiert entschieden, in extremen Fällen wie 1:2, und zwar in dem Sinne, daß eine im Grund wenig vertretene Farbe hinsichtlich ihrer „aufhellenden Kraft“ begünstigt zu werden scheint. Helmholtz deutet das durch Verallgemeinerung des Fechnerschen Gesetzes.

Wir wollen nun zeigen, daß das Winkelverhältnis  $\zeta'/\varepsilon'$  nicht mit dem Helligkeitsverhältnis zusammenfällt, daß die Unabhängigkeit dieses Bruches von der Farbe des Grundes nicht zu erwarten ist, und daß im besonderen unser Linien-element (12) bzw. (12'), welches die Helligkeitsfunktion (10) bzw. (10') impliziert, gerade die beobachtete Variation des Winkelverhältnisses mit der Farbe des Grundes voraussehen läßt.

Seien (Fig. 3)  $OF$  und  $OV$  die Farbvektoren der reinen Pigmente (im oben angegebenen Sinn), dann liegt die Vektorspitze des Grundes

$$G = \lambda F + \mu V \quad [\lambda + \mu = 1]$$

1) Bei „ $F$ “ und „ $V$ “ denke man hier „feste“ und „variierte“ Farbel

auf der Verbindungslinie  $FV$ . Eine spezielle Lage von  $G$  ist gezeichnet. Die Farbe des inneren Ringes erhält man, indem man an  $OG$  einen kleinen Vektor  $GG'$  von der Richtung  $\vec{OF}$  und der Länge  $\varepsilon \cdot \vec{OF}$  ansetzt. (Diese und die folgenden Konstruktionen sind in der Figur

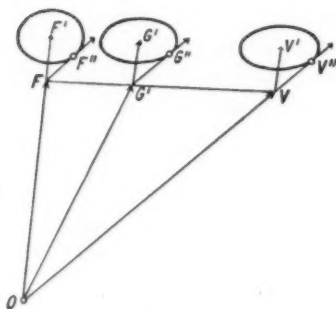


Fig. 3.

für eine mittlere und für die beiden Randlagen ausgeführt, wo  $G$  mit  $F$  bzw.  $V$  zusammenfällt.) Auf dem äußeren Ring wird zu  $OG$  ein Vektor  $GG''$  von der Richtung  $\vec{OF}$  und solcher Länge hinzugefügt, daß  $G''$  möglichst nahe an  $G'$  zu liegen kommt. Man hat, ähnlich wie früher, um  $G'$  ein Streuungsellipsoid (2) in solcher Größe zu zeichnen, daß es die Gerade  $GG''$  (die Parallele zu  $OV$  durch  $G$ )

eben berührt;  $G''$  ist der Berührungspunkt. Er liegt auf der zu  $GG''$  (bzw. in den Randlagen zu  $FF''$  und  $VV''$ ) konjugierten Durchmesserebene, nicht auf der zu  $OG$  (bzw.  $OF$ ,  $OV$ ) konjugierten Durchmesserebene, ist also im allgemeinen mit  $G'$  (bzw.  $F'$ ,  $V'$ ) nicht gleichhell. Nur in dem einen Grenzfall, wenn  $G$  mit  $V$  zusammenfällt, sind die beiden Richtungen, daher auch die konjugierten Ebenen identisch, nur in diesem Falle liegt auch hier ein gewöhnlicher Helligkeitsvergleich vor.

Nur wenn die beim Versuch variierte Farbe dieselbe ist wie die Farbe des Grundes, läßt sich aus dem Verhältnis der kleinen Zusatzwinkel unmittelbar das Helligkeitsverhältnis der beiden Pigmente berechnen.

Im übrigen erkennt man ohne weiteres aus der Figur, daß in allen anderen Fällen  $GG''$  noch verlängert werden müßte, um die zu  $GO$  konjugierte Ebene zu durchstoßen; ein kleinerer Zusatz der variierten Farbe  $V$  (kleiner, als für Helligkeitsgleichheit nötig wäre) reicht aus zur Herstellung größter Ähnlichkeit. D. h. (wenn man den Helmholtzschen Irrtum begeht) die variierte Farbe scheint auf andersfarbigem Grund relativ stärker aufhellend zu wirken als auf ihrem eigenen;

wie Helmholtz wirklich gefunden hat. Auch kann man vermuten, daß die Abweichung um so größer wird, je mehr die Richtungen  $OG$  und  $GG''$  voneinander abweichen, d. h. je näher  $G$  an  $F$  heranrückt.

Der letzte Schluß ist jedoch nicht sicher, weil die Gestalt des Streuungsellipsoids mitvariiert, wenn sein Mittelpunkt  $G'$  sich entlang der Geraden  $V'F''$  verschiebt.

Quantitativ ergibt sich folgendes. Seien die Koordinaten von

$$\begin{aligned} F & \dots y_i \\ V & \dots z_i \\ G & \dots x_i = \lambda y_i + \mu z_i. \end{aligned}$$

Die Koordinaten von

$$\begin{aligned} G' & \text{ sind } x_i + \varepsilon y_i \\ G'' & \text{ sind } x_i + \zeta z_i. \end{aligned}$$

Der Vektor  $G'G''$  hat daher die Komponenten

$$\zeta z_i - \varepsilon y_i.$$

Er muß konjugiert sein (bezüglich des Streuungsellipsoids in  $G'$ ) zur Richtung  $GG''$ , deren Komponenten sich wie die

$$z_i$$

verhalten. D. h. es muß

$$a_{ik} (\zeta z_i - \varepsilon y_i) z_k = 0$$

oder

$$(21) \quad \frac{\zeta}{\varepsilon} = \frac{\sum_i \sum_k a_{ik} y_i z_k}{\sum_i \sum_k a_{ik} z_i z_k}.$$

Dies ist nach (20) das scheinbare Helligkeitsverhältnis der festen Farbe  $F$  zur variierten Farbe  $V$ . Dabei sind unter den  $a_{ik}$  streng genommen ihre Werte im Punkte  $G'$  zu verstehen, wofür natürlich mit ausreichender Genauigkeit die Werte in  $G$ , also für  $x_i = \lambda y_i + \mu z_i$  gesetzt werden dürfen.

Das wahre Helligkeitsverhältnis muß, wie wir gesehen haben, durch dieselbe Formel gegeben sein, wenn man den  $a_{ik}$  ihre Werte im Punkte  $V$  verteilt.

Spezialisieren wir für unser Linienelement (12'), setzen also

$$a_{ik} = 0 \quad [i \neq k] \quad a_{ii} = \frac{1}{(x_1 + x_2 + x_3) x_i},$$

so ergibt sich

$$(22) \quad \frac{z}{s} = \frac{\frac{z_1}{x_1} \cdot y_1 + \frac{z_2}{x_2} \cdot y_2 + \frac{z_3}{x_3} \cdot y_3}{\frac{z_1}{x_1} \cdot z_1 + \frac{z_2}{x_2} \cdot z_2 + \frac{z_3}{x_3} \cdot z_3},$$

wo  $x_i = \lambda y_i + \mu z_i$ . Man erkennt, daß sich das *richtige* Helligkeitsverhältnis ergibt, wenn die  $x_i$  mit den  $z_i$  zusammenfallen.

Wie das scheinbare Helligkeitsverhältnis mit der Farbe des Grundes ( $x_i$ ) variiert, kann man sich auf folgende Weise klar machen. In der Formel (22) treten zu den Grundempfindungswerten „fälschlich“ noch drei *Gewichtsfaktoren*  $z_i/x_i$  hinzu. Eine Grundvalenz erhält bei der Bildung des Verhältnisses ein um so größeres Gewicht, je mehr sie in der variierten Farbe ( $z_i$ ) gegenüber der Farbe des Grundes ( $x_i$ ) überwiegt. Daß der Grund mit der variierten Farbe nicht übereinstimmt, liegt aber an einer Beimischung der festen Farbe ( $y_i$ ). Die Gewichtsfaktoren bevorzugen also gerade jene Grundvalenzen, an denen die variierte Farbe reich ist auch gegenüber der festen, und zwar um so mehr, je stärker der Grund abweicht. D. h. sie bevorzugen immer mehr die variierte Farbe, je stärker der Grund von ihr abweicht — genau wie es Helmholtz gefunden hat.

Ein quantitativer Vergleich ist nicht möglich, da die Koordinaten der von Helmholtz benützten Farben nicht bekannt sind. Nur eines müßte man verlangen: da Helmholtz drei verschiedene Pigmente in drei Kombinationen benützt hat, kann man nachsehen, ob die Resultate der drei Grenzfälle, in denen  $G = V$  war, *konsistent* sind, d. h. ob das Produkt der der Helligkeitsverhältnisse

$$\frac{\text{Rot}}{\text{Blau}} \times \frac{\text{Blau}}{\text{Grün}} \times \frac{\text{Grün}}{\text{Rot}}$$

der Einheit gleich ist, wie die Theorie für diesen Fall verlangt (weil eben in diesem Fall eine gewöhnliche Helligkeitsmessung vorliegt). Bildet man aus den Daten a. a. O. die Verhältnisse, so ergibt sich leider

$$1,33 \times 0,41 \times 1,20 = 0,66.$$

Die anderen Extremfälle geben, ebenso kombiniert, 1,55, auf  $1/2$  und  $1/2$  gemischtem Grund ergibt sich 1,19.



In diesem Punkte entsprechen die Versuche also nicht der Theorie — aber auch nicht der von Abney, Exner, Kohlrausch, nach Methoden, die einer viel höheren Präzision fähig sind, gesammelten Erfahrung. Wenn die variierte Farbe mit der des Grundes übereinstimmt, handelt es sich ja wirklich nur um eine reine Intensitätsänderung auf dem äußeren Ring (bei konstantem inneren Ring), die sich mit einem Polarimeter sehr viel genauer und bequemer vornehmen läßt, weil man nicht für jede Veränderung den Kreisel aufzuhalten und die Farbscheiben zu verschieben braucht, sondern die verschiedenen Einstellungen kontinuierlich aneinander reiht und hinsichtlich ihrer Güte vergleicht. Und gerade auf diesem Wege ist die Konstanz des Helligkeitswertes einer Pigmentfarbe in den verschiedensten Gemischen von Exner mit großer Schärfe festgestellt worden.

§ 7. Die Geodätischen. Das Maß endlicher Verschiedenheit.  
Heterochrome Photometrie.

Bisher haben wir immer nur den Ansatz für das Linien-element in differentieller Form, als Maß der Verschiedenheit von *wenig* verschiedenen Farbenpaaren, benützt; von der dritten Annahme des § 2, daß für *stark* verschiedene Farben des Linienintegral von  $ds$  längs der kürzesten Verbindungslinie die Verschiedenheit mißt, wurde noch gar kein Gebrauch gemacht. Wir werden sie jetzt dazu verwenden, um zu beurteilen, was die Theorie hinsichtlich der *stark* heterochromen Photometrie für Aussagen macht, ob sie mit der „fast monochromen“ oder der Photometrie in *kleinen Stufen*, auf die allein wir die Definition der Helligkeit gestützt haben, übereinstimmen muß oder nicht.

Wir denken uns wieder einen Farbenpunkt  $F$  fest, einen anderen  $F'$  veränderlich auf seinem Radiusvektor, der aber jetzt nicht nahe an  $F$  vorbeiführt, sondern eine beliebige Richtung haben mag. Es ist diejenige Lage  $F''$  von  $F'$  aufzusuchen, die am nächsten an  $F$  liegt;  $F''$  ist also der Fußpunkt des von  $F$  auf den Radiusvektor  $OF'$  gefällten geodätischen Lotes. Es fragt sich, ob dieser Fußpunkt mit  $F$  auf derselben Isolychne

$$x_1 + x_2 + x_3 = \text{const}$$

liegt.

• Zur Berechnung der geodätischen Linien bringen wir das Linienelement (12') durch die Transformation

$$(23) \quad \xi_1 = \sqrt{x_1}, \quad \xi_2 = \sqrt{x_2}, \quad \xi_3 = \sqrt{x_3}$$

auf die Gestalt

$$(23a) \quad ds^2 = 4 \cdot \frac{d\xi_1^2 + d\xi_2^2 + d\xi_3^2}{\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2}$$

und bemerken, daß, wenn man vorübergehend die  $\xi_i$  als rechtwinkelige Koordinaten deutet, im Raume der  $\xi_i$  vollkommene Kugelsymmetrie um den Nullpunkt herrscht. Daher muß hier, im Raume der  $\xi_i$ , die Geodätische zwischen zwei Farbpunkten, etwa Y und Z eine *ebene* Kurve in der Ebene YZO sein. Führt man in dieser Ebene Polarkoordinaten ein,  $r, \psi$ , so muß der Ausdruck von  $ds^2$  durch  $dr$  und  $d\psi$  immer derselbe sein, unabhängig von der Stellung der Ebene, und man erkennt durch Spezialisierung (etwa  $\xi_3 = 0$ ), daß er lauten muß

$$(24) \quad ds^2 = 4 \left( \frac{dr^2}{r^2} + d\psi^2 \right) = 4 [(d \lg r)^2 + d\psi^2].$$

Daraus erkennt man, daß die Geodätischen *in den Variabeln  $\psi$  und  $\lg r$  gerade Linien* sind, im Raum der  $\xi_i$  also *ebene logarithmische Spiralen mit dem asymptotischen Punkt in 0*. Ihre Gleichung in  $\psi$  und  $r$  [die in Wahrheit nur *zwei* unabhängige Konstante enthält; zwei weitere sind enthalten in der willkürlichen *Ebenenstellung*] schreiben wir in der Form

$$(25) \quad \frac{\psi - \psi'}{\psi'' - \psi'} = \frac{\lg \frac{r}{r'}}{\lg \frac{r''}{r'}}$$

wo  $\psi', r', \psi'', r''$  Konstante sind, nämlich die Polarkoordinaten der Punkte Y, Z durch welche die Geodätische gehen soll. Als Spezialfälle für

$$a) \psi' = \psi'', r' \neq r''; \quad b) \psi' \neq \psi'', r' = r''$$

ergibt sich

$$(26) \quad a) \psi = \text{const}; \quad b) r = \text{const}.$$

Das sind a) Gerade durch den Ursprung, und zwar nicht nur im  $\xi_i$ , sondern auch im  $x_i$ -Raum, da nach (23) feste Verhältnisse der  $\xi_i$  auch feste Verhältnisse der  $x_i$  im Gefolge haben. Wir merken an:

Beim Übergang zu einer lichtstärkeren oder lichtschwächeren Farbe gleicher Reizart (das ist also bei bloßer Änderung der absoluten Intensität ohne Änderung der Zusammensetzung des Lichtgemisches) bewegt man sich nach unserer Theorie auf einer kürzesten Farbreihe. Wir kommen darauf im § 10 zurück.

b) liefert die Kreise um den Ursprung oder, anders ausgedrückt, die Großkreise der um den Ursprung geschlagenen Kugeln

$$\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2 = \text{const.}$$

Diese Kugeln im  $\xi$ -Raum sind aber nach (23) im  $x$ -Raum nichts anderes als unsere Isolychnen (vgl. 10'). Die Geodätische zwischen zwei gleichhellen Punkten ist also im  $\xi$ -Raum ein solcher Großkreis, im  $x$ -Raum eine ebene Kurve (und zwar eine Ellipse, wie wir später sehen werden) auf der Isolychne. Da die Isolychne, wie wir von früher wissen, von jedem Radiusvektor orthogonal (im Sinne der Riemanngeometrie) durchsetzt wird, bildet jene ebene Kurve das gemeinsame geodätische Lot zwischen irgend zweien ihrer Radienvektoren.

Damit ist unsere eingangs gestellte Frage beantwortet: der Fußpunkt des Lotes liegt mit dem Ausgangspunkt stets auf derselben Isolychne, die heterochrome Photometrie sollte, soweit sie überhaupt ausführbar ist, nach unserer Theorie dasselbe Resultat ergeben wie die stufenweise, fast monochrome.

Für später merken wir noch an (was aus der Gestalt (23a) des Linienelementes sofort klar ist), daß überhaupt auf den isolychnischen Kugeln des  $\xi$ -Raumes unsere Maßbestimmung mit der gewöhnlichen Euklidischen übereinstimmt; es wechselt nur der Maßstab von Kugel zu Kugel, und zwar dient als Längeneinheit der Kugelradius. Die Maßverhältnisse, sowie überhaupt die gesamte Geometrie innerhalb einer Isolychne ist also durch unsere  $\xi$ -Transformation vollkommen anschaulich geworden, nämlich auf die gewöhnliche Geometrie der Kugel reduziert; nach ihr ist insbesondere der Winkel zweier Linienelemente, das Senkrechtstehen usw. zu beurteilen.

Den Verlauf der allgemeinen Geodätischen im  $x$ -Raum werden wir im nächsten Abschnitt diskutieren. Hier wollen wir noch anhangsweise, da sie sehr leicht ausführbar ist, die Rektifikation durchführen, die nach unserer Theorie das Maß der Verschiedenheit zweier endlich verschiedener, d. h. zweier beliebiger Farben liefert, wovon wir im § 2 ausgegangen waren.

Nach (24) und (25) ist längs der Geodätischen

$$(27) \quad \left\{ \begin{aligned} \int_Y^Z ds &= 2 \int_Y^Z \sqrt{(d \lg r)^2 + d\psi^2} = 2 \int_Y^Z \sqrt{\left( \lg \frac{r''}{r'} \right)^2 + 1} \cdot \int_Y^Z d\psi \\ &= \sqrt{\left( \lg \frac{r''}{r'} \right)^2 + 4(\psi'' - \psi')^2}, \end{aligned} \right.$$

wobei  $r'$ ,  $\psi'$ ,  $r''$ ,  $\psi''$  sich jetzt natürlich auf die Endpunkte  $Y, Z$  beziehen. Das Verschiedenheitsmaß setzt sich also in plausibler Weise aus zwei Komponenten zusammen, dem *Helligkeitsunterschied*, für den das Längenverhältnis der Radienvektoren im  $\xi$ -Raum, und dem *Farbunterschied*, im engeren Sinn, für den der Winkel zwischen eben diesen Radienvektoren maßgebend ist. In den eigentlichen Koordinaten,  $y_i, z_i$  der Farbpunkte  $Y, Z$  und ihren Helligkeiten, etwa

$$h_y = \Sigma y_i, \quad h_z = \Sigma z_i$$

erhält man, da offenbar

$$h_y = r'^2, \quad h_z = r''^2, \quad \arccos \frac{\sqrt{y_1 z_1} + \sqrt{y_2 z_2} + \sqrt{y_3 z_3}}{\sqrt{h_y h_z}} = \psi'' - \psi'$$

folgenden Ausdruck für das Verschiedenheitsmaß

$$(28) \quad \int_Y^Z ds = \sqrt{\left( \lg \frac{h_z}{h_y} \right)^2 + 4 \left( \arccos \frac{\sqrt{y_1 z_1} + \sqrt{y_2 z_2} + \sqrt{y_3 z_3}}{\sqrt{h_y h_z}} \right)^2}.$$

Als Beispiel habe ich den Ausdruck nach den Daten der Tab. 1 berechnet für das Rot  $\lambda = 640$  und das Cyanblau  $\lambda = 480$ , jedoch bei gleicher Helligkeit. Man erhält sehr nahe 1. Das bedeutet, daß unter Beobachtungsverhältnissen, wo die Fechnerstufe, sagen wir, 0,01 beträgt, der Übergang durch 100 ebenmerkliche Zwischenstufen sich sollte bahnen lassen, wenn man die Zwischenstufen so geschickt wie möglich wählt.

#### § 8. Diskussion des Verlaufs der geodätischen Linien im $x$ -Raum.

Es ist von Interesse, sich eine deutlichere Vorstellung vom Verlauf der geodätischen Linien in unserem für die niedere Farbenmetrik so bedeutungsvollen Vektorenraume der  $x_i$  zu machen. Das unsympathische an der Transformation (23) ist,

daß sie nicht ein-eindeutig ist: der *positive* Oktant des  $x$ -Raums<sup>1)</sup>, um den allein es sich handelt, wird auf *jeden* der 8 Oktanten des  $\xi$ -Raumes abgebildet. Wenn darum z. B. eine unserer logarithmischen Spiralen vom ersten  $\xi$ -Oktanten ausgehend auf eine Koordinatenebene trifft und, sie durchsetzend, in einen anderen Oktanten eintritt, so kehrt die entsprechende Kurve des  $x$ -Raumes doch wieder in den ersten Oktanten zurück, läuft unter ständiger Annäherung an den Ursprung (genauer: Verminderung der  $\Sigma x_i$ ) hinüber zur zweiten Koordinatenebene, von da zur dritten usw. So nähert sie sich unter beständigen Windungen zwischen den drei positiven Quadranten der Koordinatenebenen, immer im ersten Oktanten bleibend, asymptotisch dem Ursprung.

In was verwandelt sich die *Ebene durch den Ursprung* des  $\xi$ -Raumes, auf der jede Geodätische verläuft, im  $x$ -Raum? Jeder solchen Ebene, etwa

$$(29) \quad \gamma_1 \xi_1 + \gamma_2 \xi_2 + \gamma_3 \xi_3 = 0$$

entspricht

$$\gamma_1 \sqrt{x_1} + \gamma_2 \sqrt{x_2} + \gamma_3 \sqrt{x_3} = 0$$

oder

$$\gamma_1^2 x_1 = \gamma_2^2 x_2 + \gamma_3^2 x_3 - 2\gamma_2 \gamma_3 \sqrt{x_2 x_3}$$

oder

$$(30) \quad (\gamma_1^2 x_1 - \gamma_2^2 x_2 - \gamma_3^2 x_3)^2 = 4\gamma_2^2 \gamma_3^2 x_2 x_3.$$

Das ist ein Kegel zweiter Ordnung mit dem Scheitel im Ursprung. Bildet man seinen Schnitt mit den Koordinatenebenen, so erhält man jedesmal eine *doppeltgezählte* Gerade, z. B. für  $x_1 = 0$ :

$$(\gamma_2^2 x_2 - \gamma_3^2 x_3)^2 = 0.$$

Der Kegel berührt also alle drei Koordinatenebenen.

Betrachten wir nun, wie im § 10 des ersten Teiles, einen *Schnitt* unseres Vektorbüschels mit einer Ebene, etwa mit der Isolychne

$$x_1 + x_2 + x_3 = \text{const.}$$

Die Spur der Koordinatenebenen ist das bekannte Farbdreieck, daß bei der angenommenen Fixierung der Vorstellungen, gleichzeitig ausfällt. Die Spur unserer Kegel sind Kegelschnitte,

---

1) Um die Vorstellungen zu fixieren, denken wir uns die  $x_i$  als *rechtwinklige* Koordinaten!

die, da sie in der Isolychne liegen, selbst geodätisch sind. Da sie jedenfalls *teilweise* im Inneren des Dreiecks verlaufen und es nirgends durchsetzen — über einen Wendepunkt verfügt ein Kegelschnitt ja nicht —, verlaufen sie *ganz* im Innern, müssen also Ellipsen sein.

Damit haben wir aber, fast ohne Rechnung, nun auch schon eine *vollständige* Anschauung von der *Gesamtheit der geodätischen Linien auf einer Isolychne* gewonnen: es ist die *Gesamtheit der dem Farbendreieck eingeschriebenen Ellipsen*. Denn durch jeden Punkt muß es eine Geodätische in jeder vorgeschriebenen Ausgangsrichtung geben. Wenn wir aber in einem Punkt der Isolychne auch noch die Tangente vorschreiben, so ist die Ellipse durch die weitere Forderung, daß sie die Dreiecksseiten berühren soll, *eindeutig* gegeben.

Nur eine gewisse *Mehrdeutigkeit* hinsichtlich der *kürzesten* Verbindungslinie zweier Punkte des isolychnischen Farbendreiecks müssen wir noch beseitigen. Eingeschriebene Ellipsen durch zwei vorgegebene Punkte gibt es im allgemeinen *zwei*, mithin *vier* geodätische Ellipsenbogen. Welches ist der kürzeste?<sup>1)</sup>

Wie erwähnt, genügt *ein* Oktant des  $\xi$ -Raumes, etwa der erste, zur Abbildung des ersten  $x$ -Oktanten, der uns allein interessiert. Dem Teil der Ebene (29), der im ersten Oktanten liegt, entspricht nun offenbar der Teil des Kegels (30), der zwischen zwei Berührungslinien mit den Koordinatenebenen liegt. Will man zu den beiden anderen Mantelstücken die entsprechenden Punkte *im ersten*  $\xi$ -Oktanten finden, so muß man die übrigen Teile der Ebene (29) an den Koordinatenebenen in den ersten  $\xi$ -Oktanten hereinspiegeln. Man gelangt so zu einem dem ersten  $\xi$ -Oktanten eingeschriebenen Dreikant

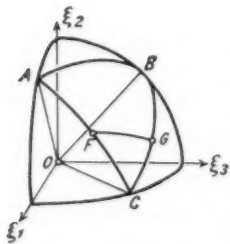


Fig. 4.

(*0*  $ABC$  der Fig. 4), und dieses ist es eigentlich, das sich bei der Transformation (23) in den positiven  $x$ -Kegel deformiert, wobei die Ecken sich abrunden und  $OA$ ,  $OB$ ,  $OC$  in die Be-

1) Man wolle die einfache Figur, die ich der *Raumersparnis* wegen nicht hinzeichne, *skizzieren*.

rührungslinien übergehen. Daraus erkennt man, daß nur derjenige Ellipsenbogen zwischen zwei Punkten kürzeste Verbindungslinie ist, der keinen Berührungspunkt enthält — und das ist von den vier möglichen immer nur einer. Denn im  $\xi$ -Raum ist natürlich zwischen den Punkten  $F$  und  $G$  das Bogenstück  $FG$  das kürzeste, nicht etwa das geknickte Stück  $GCF$  oder gar  $GBAF$ .

Ähnliches gilt natürlich von den logarithmischen Spiralen. Sie setzen sich auf dem Dreikant  $ABC$  zu einem geknickten Kurvenzug zusammen, der, den Dreikant umwindend, gegen  $O$  hin konvergiert. Im  $\alpha$ -Raum glättet sich dieser Kurvenzug und umwindet den Kegel wie die Züge eines konischen Bohrer, mit unbegrenzt abnehmender Ganghöhe asymptotisch gegen den Ursprung zielend. Als Kürzeste fungiert dabei aber stets nur das Stück zwischen zwei aufeinander folgenden Berührungspunkten mit den Koordinatenebenen.

Wir sprachen bisher nur vom isolychnischen Farbensdreieck, das durch unsere besonderen Annahmen gleichseitig ausfiel. Offenbar sind beide Beschränkungen unwesentlich, da die Eigenschaft der Berührung gegen die in Betracht kommenden linearen Transformationen invariant ist. Die einem Dreikant eingeschriebenen Kegel zweiter Ordnung verwandeln sich bei affiner Transformation wieder in die dem entsprechenden Dreikant eingeschriebenen Kegel zweiter Ordnung, und ähnliches gilt für die einem Dreieck eingeschriebenen Ellipsen bei projektiver Transformation. Daher gilt folgendes:

1. Für jedes beliebige auf die wahren Grundfarben (aber bei beliebigen Einheiten!) bezogene Farbensdreieck, wenn man darin alle Farben mit gleicher Helligkeit lokalisiert denkt, sollen nach unserer Theorie die eingeschriebenen Ellipsen die kürzesten Übergangsreihen zwischen zwei gleichhellen Farben bezeichnen, wobei alle Übergangstöne gleichhell zu nehmen sind.

2. Auch für zwei verschieden helle Farben gibt der Ellipsenbogen die Aufeinanderfolge der Reizarten an, durch welche hindurch der rascheste Übergang zu bewerkstelligen ist. Dabei ist die Helligkeit mit der Reizart gleichzeitig in bestimmter gesetzmäßiger Weise zu variieren.

Die Art dieser Gesetzmäßigkeit ist im  $\xi$ -Raum durch die logarithmischen Spiralen (25) gegeben. Man hätte in diese

Gleichung die  $x_i$  einzuführen, gewinnt aber dadurch kein anschauliches Bild. Vollkommen anschaulich ist die Differentialform des Gesetzes

$$d\psi = c \, d \lg r \qquad \left[ c = \frac{\psi'' - \psi'}{\lg \frac{r''}{r'}} \right]$$

Denn nach (24) ist ja

$$ds = 2 \sqrt{(d \lg r)^2 + d\psi^2}.$$

Die Gesamtstufe  $ds$  setzt sich also aus zwei Teilen zusammen: der Helligkeitsstufe  $d \lg r$  ( $= \frac{1}{2} d \lg h$ ) und der Reizartstufe  $d\psi$ . Diese sind auf der geodätischen Bahn einander proportional. D. h. man hat die gesamte Helligkeitsänderung, die nötig ist, auf die Reizartänderungen *gleichmäßig aufzuteilen*: wählt man etwa die *Reizartstufen* so, daß sie, *bei ungeänderter Helligkeit ebenunterscheidbar* wären, so hat man die *Helligkeit* um einen bestimmten, längs der geodätischen Linie konstanten, *Bruchteil* (oder ein bestimmtes Multiplum) der *bei ungeänderter Reizart ebenunterscheidbaren Helligkeitsstufe* zu variieren.

#### § 9. Spezielle Fälle. Die Farbtonänderung beim Zumischen von Weiß.

Nur in besonderen Fällen ist die geodätische Verbindung auch im  $x$ -Raum geradlinig, d. h. fällt die kürzeste Farbreihe mit den Mischfarben der Endpunkte zusammen. *Einen* solchen Spezialfall haben wir schon im § 7 erwähnt (Fortschritt auf einem Radiusvektor, d. h. ungeänderte Reizart). Die einzige weitere Möglichkeit ist die, daß bei gleichhellen Farben der Ellipsenbogen in eine Gerade ausartet. Das ist dann der Fall wenn die Verbindungsgerade der beiden Farben durch einen Eckpunkt des Farbdreiecks geht (oder, im Vektorraum gesprochen, eine Koordinatenachse trifft). In das doppeltgezählte Stück dieser Geraden, soweit sie im Inneren des Farbdreiecks liegt, artet dann die Ellipse aus. Die farbenmetrische Besonderheit dieses Falles ist die, daß die Endfarben *in einem Koordinatenverhältnis* (z. B.  $x_2/x_3$ ) *übereinstimmen*.

Dieses Ergebnis der Theorie stimmt auffallend überein





Rot  
Grün-Verhältnis hat, findet sich auf der Verbindungsgeraden mit dem dritten Eckpunkt,  $VF_3$ , bei  $A$ . Daß diese Verbindungsgerade nicht nur geodätisch ist, sondern auch im Schnittpunkt  $A$  auf  $F_1F_2$  senkrecht steht, mithin wirklich das *geodätische Lot* von  $V$  auf  $F_1F_2$  bildet, macht man sich leicht an unserer  $\xi$ -Transformation klar, welche  $F_1F_2$  und  $F_3A$  in orthogonale Großkreise der betreffenden isolychnischen Kugel verwandelt.

Das Ergebnis wird in seinem Wert ein wenig gedrückt dadurch, daß Abney nicht genau die richtigen (Königschen) Grundfarben verwendet hat. Groß sind die Unterschiede allerdings nicht.

Auch möchte ich es dahingestellt sein lassen, ob die Ausdrucksweise Abneys, es sei die *Farbe vom gleichen Farbton* (hue) ausgesucht worden, vollkommen passend ist. Für mein Gefühl ist das spektrale Rot eine sehr gesättigte, das Gelb eine viel ungesättigtere, dem Weiß näherstehende Farbe; es wundert mich also nicht, daß man nach Weißzusatz die ähnlichste Farbe näher an Gelb sucht; aber das ist, glaube ich, mehr dem starken Sättigungsabfall in dieser Richtung zuzuschreiben, als dem, daß etwa das Rot durch Weißzusatz gelblicher würde. Bei eigenen Versuchen schien es mir im Gegenteil einen Stich ins Purpur zu bekommen.

Dagegen legt die Theorie der kürzesten Farbreihen eine andere Definition der Farbtongleichheit nahe; ich betone ausdrücklich, daß es sich dabei *nicht* um eine „Folgerung aus der Theorie“ handelt; die über *Empfindungen* natürlich überhaupt keine Aussage macht, sondern nur um den Versuch, einen Begriff, dessen bisherige quantitative Fassung zu äußerlich ist und sich mit der Empfindung *nicht* deckt, anders und tiefer zu fassen und so, daß er sich womöglich besser mit der Empfindung decke.

Um einen kurzen Ausdruck zu haben, pflegt man bisher alle Mischungen aus Weiß und einem Spektrallicht der Wellenlänge  $\lambda$  als farbtongleich zu bezeichnen und den Farbton durch Angabe dieser Wellenlänge zu charakterisieren; andererseits weiß man, daß der Farbton, subjektiv beurteilt, durch Zumischen von Weiß verändert wird.

Ich bringe das nun (wie übrigens schon Helmholtz in einem analogen Falle getan) damit im Zusammenhang, daß die Reihe der Mischfarben *nicht* die kürzeste Übergangsreihe von der Spektralfarbe zum Weiß bildet. Es scheint mir wahrscheinlich, daß der rascheste Übergang von irgendeiner ausgesprochenen Farbe zur Farblosigkeit sich ohne Änderung des Farbtons vollziehe, weil eine solche, als überflüssig neu hinzutretendes Unterscheidungsmerkmal zwischen Nachbarfarben der Reihe, den Weg verlängern müßte.

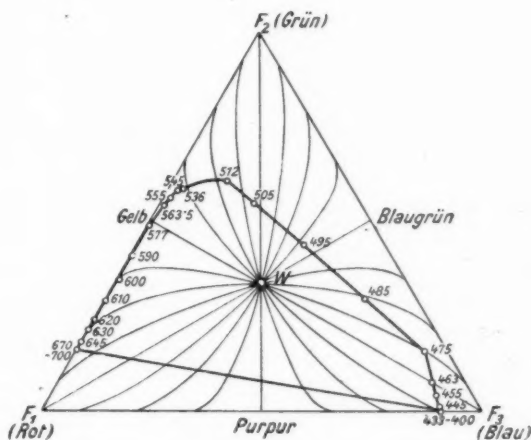


Fig. 6.

Als farbtongleich mit einer gegebenen Farbe hätte man dann also jene Farben zu definieren, die auf der kürzesten Linie zum Weiß liegen.

Konsequent und in sich widerspruchsfrei ist diese Definition jedenfalls. Ob sie wirklich der Empfindung besser entspricht, als die erstgenannte, kann natürlich nur das subjektive Urteil entscheiden.

Was würde sie nun im einzelnen aussagen? Fig. 6 zeigt das Bündel geodätischer Linien durch den Weißpunkt in einem Farbdreieck, in welchem wir uns gleichhelle Farben lokali-

siert denken wollen. Geradlinig sind nur die Verbindungen zu den Grundfarben und ihren Gegenfarben, nur in diesen Fällen wären die Weißmischungen konstant im Farbton. Von allen Zwischenfarben erscheinen die Weißmischungen im Farbton verschoben gegen die überwiegende Grundfarbe, d. h. gegen diejenige Grundfarbe, welche darin — verglichen mit dem Mischungsverhältnis der drei Grundfarben, das farblos erscheint — am stärksten vertreten ist. Denn man findet ja nach Annahme zu einer Farbe in der Nähe des Weißpunkts die farbtongleichen am Rande des Dreiecks, indem man längs einer Kurve des Büschels fortschreitet, und das Büschel zieht sich in einem dreistrahligem Stern gegen die Grundfarbenpunkte zusammen.

Da die wirklich herstellbaren Farben in dem Segment enthalten sind, welches die Spur der im ersten Teil vielbesprochenen Düte bildet, so erkennt man, daß die Erscheinung in einem Teil des Spektrums, wo die Ellipsenbogen von Geraden wenig abweichen, wenig merklich sein wird. Am stärksten muß sie in Rot und Orange, dann im Indigo und Violett zutage treten.

Man sollte erwarten, daß, wenn man ein Spektrum mit Weiß in zunehmender Stärke übergießt, alle Farben den nächstgelegenen Grundfarben näherrücken, und daß schließlich, wie beim Bezold-Brückeschen Phänomen, drei Partien vom Farbton der Grundfarben übrig bleiben, mit ziemlich schroffen Übergängen im früheren Gelb und Blaugrün. Diese Farben selbst, als Gegenfarben des Grundblau und Grundrot, sind zwar ebenfalls permanent, werden aber wenig hervortreten, da die Nachbarn von ihnen abrücken.

Ich habe den einfachen Versuch mit einem etwa 1 m langen Gitterspektrum der Sonne ausgeführt, übrigens zu einer Zeit, als ich mir über die eben vorgetragene theoretische Deutung noch nicht klar war. Die Erwartungen bestätigen sich insofern, als in der Tat bei starker Verdünnung drei Farbtöne mit schroffen Übergängen übrig bleiben. Das Rot bekam, wie mir schien, ganz deutlich einen Stich ins Rosenrote, der es dem Grundrot im Farbton ähnlicher macht. Die permanente Farbe im kurzwelligen Teil aber war nicht Blau, sondern — wie schon viele Beobachter festgestellt haben — ein, natürlich sehr

weißliches, Purpurviolett. Der rote Einschlag war deutlicher, als im reinen, unverdünnten Spektrum.

Ich würde nicht wagen, auf die hier vorgeschlagene, doch noch recht unsichere Theorie der Farbtonänderung eine bestimmte Vermutung über die Beschaffenheit der dritten Grundfarbe zu gründen, die von der Meinung anderer, viel erfahrener Forscher abweiche. • Aber unser Ergebnis — daß die dritte Grundfarbe Rotviolett und nicht Blau sein muß, wenn die Theorie stimmen soll — trifft mit der Vermutung, die König selbst in einer späteren Arbeit<sup>1)</sup> geäußert hat, so vollkommen zusammen, daß wir nicht in der Theorie, sondern in der üblich gewordenen Lage des dritten Grundpunktes den Fehler erblicken möchten.

Man verschiebe — unter Festhaltung der Spektralkurve — den Punkt  $F_3$  nach abwärts und nach links, so daß die Gerade  $WF_3$  nicht mehr die Spektralkurve, sondern das violette Ende der Purpurgeraden trifft; wobei natürlich die Geodätischen als eingeschriebene Ellipsen des *abgeänderten* Dreiecks zu zeichnen sind. Dann wird die gefundene Verschiebung gegen Rotviolett verständlich — aber auch die a. a. O. beschriebenen Versuche an Königs Blaublinden.<sup>2)</sup>

#### § 10. Das Bezold-Brückesche Phänomen. Ausblick auf eine künftige Verbesserung des Linienelements.

Der Farbtonänderung beim Vermischen mit Weiß einigermaßen verwandt ist die Farbtonänderung, die beim bloßen Herabsetzen der objektiven Intensität eines Lichtgemisches (ohne Änderung der prozentuellen Zusammensetzung) eintritt, man kann sagen: die Farbtonverschiedenheit von Farben gleicher Reizart. Dabei findet ebenfalls eine Annäherung an

1) A. König, „Über Blaublindheit“. Sitzungsber. d. Berliner Akad. d. Wiss. Juli 1897, S. 718ff. Die kritische Anmerkung steht auf S. 406 der „Gesammelten Abhandlungen“ (Leipzig, Johann Ambrosius Barth, 1903).

2) Königs Versuche ergaben für die pathologisch Blaublinden: 1. Mischbarkeit aller Spektralfarben aus den Endlichtern. 2. Nur einen neutralen (farblosen) Punkt im Spektrum, und zwar im Grün-gelb. Beides widerspricht der in Fig. 5 gezeichneten Lage des Fehlpunktes  $F_3$  gegenüber der Spektralkurve.

den Farbton der nächstgelegenen Grundfarbe statt; in einem sehr lichtschwachen Spektrum bleiben dann, wie in einem stark mit Weiß verdünnten, nur drei Farbtöne übrig, mit ziemlich schroffen Übergängen (Bezold-Brückesches Phänomen).

Daß diese Erscheinung von unserer Theorie mit dem Linienelement (12') nicht erfaßt wird, ist nach der einfachen qualitativen Erklärung, die Brücke davon gibt, begreiflich.

Zunächst: sie wird in der Tat nicht erfaßt. Denn wenn man auch, wie gesagt, von der Theorie keine unmittelbare Aussage über die Empfindung verlangen kann, so drängt sich doch die Annahme auf, daß zu einer *vorgegebenen* Farbe die *ähnlichste Farbe* einer *vorgegebenen* (höheren oder geringeren) *Helligkeit* die *farbtongleiche* ist; und daß auch der rascheste Übergang über lauter Farben gleichen Farbtons bewerkstelligt wird. Die geodätischen Lote auf die Isolychnen sind aber die Radienvektoren. Folglich sollten die Farben gleicher Reizart auch farbtongleich, eine Änderung des Farbtons bei bloßer Änderung der objektiven Intensität nicht vorhanden sein.

Dieses Versagen der Theorie ist *deshalb* nicht verwunderlich, weil sie ganz auf der Annahme des Fechnerschen Gesetzes für Intensitätsstufen aufgebaut ist und sicherlich nur soweit eine Annäherung an die Wirklichkeit darstellt, wie dieses Gesetz selbst. Nach Brücke beruht nun die in Rede stehende Erscheinung auf einem ganz oder teilweise Unterschwelligwerden der in der betreffenden Farbe — im Vergleich mit Weiß — am schwächsten vertretenen Grundvalenz (wobei angenommen ist, daß die Schwellenwerte der Grundvalenzen sich so verhalten, wie die Grundvalenzen des Weiß, mit anderen Worten: daß Weiß farblos unter die Schwelle sinkt).

Nun muß das Fechnersche Gesetz beim Nullpunkt des Reizes schon aus mathematischen Gründen seine Gültigkeit verlieren, weil sich dort eine unendlich hohe Unterschiedsempfindlichkeit ergibt (unser Linienintegral  $\int ds$  *divergiert*, wenn man es in den Ursprung zu führen sucht). An der Reizschwelle steht es schon in faustdickem Widerspruch mit der Erfahrung, da hier die Reizänderungen ganz aufhören, empfunden zu werden, anstatt daß, wie das Gesetz will, die Empfindlichkeit mit abnehmender Reizstärke immer größer würde. Merkliche Abweichungen vom Gesetz müssen also wohl schon

bei sehr viel größerer Reizstärke auftreten, und das bestätigt auch die Erfahrung.

Darum können wir nicht erwarten, daß eine Erscheinung, die gerade auf der Annäherung an die Reizschwellen beruht, von unserer Theorie wiedergegeben werde, solange wir uns mit dem Fechnerschen Gesetz als Näherung begnügen.

Die naheliegende Korrektur ist auch schon von Helmholtz versucht worden, allerdings natürlich an *seinem*, wie wir sahen, unbrauchbaren Linienelement.

Man hätte — in zweiter Näherung — die  $x_i$  in (12') nicht mit den Grundvalenzen zu identifizieren, sondern mit den um gewisse kleine Konstante  $\varepsilon_i$  vermehrten Grundvalenzen (Helmholtz bringt die  $\varepsilon_i$  mit dem „Eigenlicht der Netzhaut“ in Zusammenhang). D. h., an der Bezeichnungsweise des ersten Teiles festhaltend, hätte man in dieser Formel zu ersetzen

$$x_i^* \text{ durch } x_i + \varepsilon_i.$$

Dadurch wird das Verschwinden der Nenner beim Verschwinden einer Grundvalenz vermieden. Ich habe von der Anbringung einer derartigen Korrektur in diesem Aufsatz Abstand genommen, um die ohnehin nicht leichte Materie nicht noch mehr zu komplizieren. Zwar würde die Metrik des Farbenraumes dadurch nicht verändert, aber gegen den im ersten Teil betrachteten affinen Raum *verschoben*. Dadurch würden die Isolychnen leicht deformiert werden, und zwar lediglich deshalb, weil wir beim wirklichen Versuch die *objektiven* Grundvalenzen  $x_i$  proportional ändern, nicht die um das „Eigenlicht“ vermehrten,  $x_i + \varepsilon_i$ , in denen sich die Metrik einfach darstellt. Für die Gestalt der deformierten Isolychnen berechne ich

$$x_1 + x_2 + x_3 - \lg (x_1^{\varepsilon_1} x_2^{\varepsilon_2} x_3^{\varepsilon_3}) = \text{const.}$$

Es sollten sich also, besonders bei geringer Helligkeit (für große  $x_i$  tritt der Logarithmus zurück) Abweichungen von der Additivität der Helligkeit ergeben, übrigens auch Abweichungen im Helligkeitsverhältnis verschiedener Farben, wie sie König<sup>1)</sup> experimentell gefunden hat.

Überhaupt kann man sagen: diese oder eine ähnliche Korrektur unseres Linienelementes, *deren Notwendigkeit wegen*

1) Vgl. oben S. 490.

des Näherungscharakters des Fechnerschen Gesetzes außer allem Zweifel steht, muß alle in unserer „höheren Farbenmetrik“ aufgestellten „Gesetze“ — z. B. auch die genaue Übereinstimmung zwischen stark heterochromer und kleinstufiger Photometrie — zu bloßen Näherungen herabdrücken; *nur als solche wollen wir sie deshalb von vornherein aufgefaßt wissen.* Der Wert der Theorie scheint uns darin zu liegen, daß sie den inneren Zusammenhang all dieser Näherungsgesetze in Evidenz setzt, zugleich aber auch den inneren Zusammenhang der *Abweichungen der realen von unserer idealisierten, „rein Fechnerschen“ Farbenmannigfaltigkeit*; Abweichungen, die in den meisten Fällen erst der genauen experimentellen Durchforschung harren.

(Eingegangen im März 1920.)



## 2. Zur Beweglichkeitsbestimmung aus der Brownschen Bewegung an einem Einzelteilchen.

### III;

von Reinhold Fürth.

(Aus dem physikalischen Institut der deutschen Universität in Prag.)

#### § 1.

In zwei unter dem gleichen Titel in dieser Zeitschrift veröffentlichten Arbeiten<sup>1)</sup> habe ich mich mit der Frage beschäftigt, inwieweit man berechtigt ist, aus Messungen der Brownschen Bewegung an einem, in einer Flüssigkeit oder einem Gase suspendierten Einzelteilchen auf die Beweglichkeit dieses Teilchens zu schließen. Die Resultate der Untersuchung an Partikeln in Gasen ließen, infolge unserer derzeitigen Unkenntnis über die genaue Form des Widerstandsgesetzes keinen eindeutigen Schluß darüber zu, ob die nach der Einsteinschen Formel der Brownschen Bewegung aus dieser berechnete Beweglichkeit mit der gegenüber einer geradlinigen Bewegung identisch sei, insbesondere, ob sie daher zur Ladungsbestimmung an solchen Partikeln herangezogen werden könne.

Da nun die Ermittlung des Widerstandsgesetzes für sehr kleine Teilchen, wie es scheint, mit beträchtlichen experimentellen Schwierigkeiten verbunden ist, schien es mir zunächst vorteilhaft, zu untersuchen, ob die als Beweglichkeit bezeichnete Größe wirklich eine dem Partikel bzw. dem umgebenden Medium eigene, von der Geschwindigkeit der Bewegung unabhängige Größe darstelle oder mit anderen Worten, ob die Gleichung

$$(1) \quad v = B \cdot K$$

( $v$ : Geschwindigkeit,  $B$ : Beweglichkeit,  $K$ : Kraft) für einen genügend großen Bereich der Variablen  $v$  und  $K$  mit konstantem  $B$  erfüllt sei.

Dies wurde nun in mehrfacher Weise sicherzustellen getrachtet und zwar auf folgenden Wegen: 1. Durch Messung der Geschwindigkeit unter dem Einflusse verschiedener Kräfte

1) R. Fürth, Ann. d. Phys. 59, S. 409. 1919; 60, S. 77. 1919.

an ein und demselben Partikel in möglichst großem Variabilitätsbereich; 2. durch Untersuchung der Bewegung unter dem Einfluß einer periodischen Kraft von großer Frequenz und gleichzeitiger Messung von Geschwindigkeiten nach der Methode 1 an einem und demselben Partikel, um zu erproben, ob auch gegenüber einer solchen, rasch oszillierenden Bewegung die Gleichung (1) mit derselben Konstanten gültig sei, wie gegenüber solchen mit konstantem  $K$ , und schließlich 3. durch Messung der Brownschen Bewegung nach der Methode der „mittleren doppelseitigen Erstdurchgangszeiten“ und Messungen nach Art der obigen 1 und 2 an einem und demselben Partikel.

Durch letztere Art der Beobachtung war es auch möglich, eine neuerliche Vergleichung der Beweglichkeitsbestimmungen, wie sie aus den verschiedenen Widerstandsgesetzen einerseits und aus der Theorie der Brownschen Bewegung andererseits sich ergeben, durchzuführen, sowie einen neuerlichen Beitrag zur Frage nach der Größe der an solchen Partikeln auftretenden Ladungen zu liefern.

## § 2.

Die experimentelle Anordnung war, was den optischen Teil betrifft, im Prinzip dieselbe, wie sie in Teil II, S. 79, beschrieben und abgebildet ist. Jedoch geschah diesmal die Konzentration des Bogenlichtes durch das Mikroskopobjektiv *aa* statt des *AA* von Zeiss. Die Beobachtungsoptik blieb dieselbe, nämlich Objektiv *AA*, Okular 4 von Zeiss, mit einer 90fachen Vergrößerung. Als Okularmikrometer fand entweder ein Okularnetz mit  $3 \cdot 4$  quadratischen Feldern von 0,25 mm Seitenlänge Verwendung, der bei der verwendeten Optik eine Objektgröße von 0,04 mm entsprach oder ein Okularmikrometer mit  $50 \cdot 50$  quadratischen Feldern von 0,1 mm Seitenlänge, denen die wahre Objektgröße 0,016 mm zugeordnet war, beide von Zeiss.

Der früher verwendete Kondensator war durch eine zweckmäßigere Konstruktion ersetzt worden. Die Distanz seiner Platten wurde mikroskopisch mittels einer schwachen Vergrößerung und eines Okularmikrometers zu  $d = 0,204$  cm bestimmt.

Als Teilchenmaterial diente diesmal ausschließlich im Gleichstromlichtbogen in gut getrockneter Luft zerstäubtes Feinsilber.

Die Registrierung der Beobachtungen geschah, wie früher vermitteltst Metronom, Morsetaster und elektromagnetischem Doppelstiftschreiber.

Eine Änderung hatte jedoch die elektrische Anordnung erfahren, die dazu diente, dem Kondensator die zur Bewegung der Teilchen notwendige Spannung zuzuführen. Sie ist schematisch in der folgenden Figur wiedergegeben.

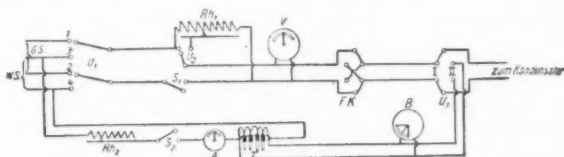


Fig. 1.

Durch Umlegen des zweipoligen Umschalters  $U_1$  auf das Klemmenpaar 1, 2 bzw. 3, 4 kann zunächst dem Kondensator entweder die konstante Spannung einer Akkumulatorenbatterie von 120 Volt oder die Wechselspannung des Prager Lichtleitungsnetzes von etwa 125 Volt zugeführt werden. Vermittelst des Ruhstrat-Regulierwiderstandes  $Rh_1$  kann man nun durch Schließen des Schlüssels  $S_1$  bis zum oben bezeichneten Höchstaussaße beliebige Gleich- oder Wechselspannungen an die Kondensatorplatten anlegen, wenn der Wippenumschalter  $U_3$  in der Stellung I steht. Vermittelst des Umschalters  $U_2$  kann man nach Bedarf mit einem Griff entweder die variable oder die volle zur Verfügung stehende Spannung anlegen, die mittels des Voltmeters  $V$  (Hitzdrahtvoltmeter für Gleich- und Wechselstrom von Hartmann und Braun) zur Messung gelangt.<sup>1)</sup> Der durch ein Pedal betätigbare Hg-Kommutator  $F \cdot K$  dient, wie üblich, zum raschen Verändern der Feldrichtung.

Um auch mit Wechselstrom höherer Spannung arbeiten zu können, diente der aus den Spulen eines Runkorffinduktors bestehende Wechselstromtransformator  $T$ , in dessen Primärspule der Wechselstrom durch einen Regulierwiderstand  $Rh_2$

1) Durch einen in der Figur nicht gezeichneten Umschalter konnte dabei nach Bedarf jeder der beiden verschiedenen Meßbereiche des Instrumentes zur Anwendung kommen.

und den Schlüssel  $S_2$  eingeleitet wird; zu seiner Messung dient das Weicheisenampèremeter  $A$ . Von der Sekundärwicklung von  $T$  führen zwei Drähte zu dem Umschalter  $U_3$ , der somit in der Stellung II den Kondensator mit der Hochspannung verbindet. Ihre Messung erfolgt mittels eines Braunschen Elektrometers  $B$ . Auf diese Weise wurde es ermöglicht, mit Wechselspannungen bis zu 2500 Volt arbeiten zu können.

Da mir die empirisch geeichte Skala des Braunschen Elektrometers nicht völlig verläßlich schien, wurde eine Eichung des Instrumentes auf folgende Methoden vorgenommen. 1. Durch Vergleich mit den Angaben eines statischen Voltmeters nach dem Prinzip von Thomson, mit zwei Empfindlichkeitsstufen. 2. Durch gleichzeitige Messung von effektiven Wechselspannungen mittels des Braunschen Elektrometers und eines Hitzdrahtvoltmeters von Hartmann und Braun mit vorgeschaltetem hohen Widerstande, um es für einen höheren Meßbereich gebrauchen zu können. Durch Messung des vorgeschalteten Widerstandes einerseits und des inneren Widerstandes des Voltmeters anderseits; mit Berücksichtigung der Impedanzwirkung konnten so die Angaben des Voltmeters auf den höheren Meßbereich umgerechnet werden. Die Messung wurde mit zwei verschiedenen Vorschaltwiderständen ausgeführt. 3. wurden zwei Zeigerstellungen des Braunschen Elektrometers verglichen mit den Angaben eines absoluten Elektrometers nach Thomson (mit Schutzring). Die Resultate wurden graphisch ausgeglichen und zur Herstellung einer Korrekturtabelle für das Braunsche Elektrometer benützt. Da die Übereinstimmung der Eichergebnisse nach diesen Methoden einigermaßen zu wünschen übrig ließ, muß den Spannungsangaben für die Hochspannung eine gewisse Ungenauigkeit zugute gehalten werden.

In Ermangelung eines Frequenzmessers wurde ferner die Frequenz des verwendeten Wechselstromes vermittelt eines Telephones bestimmt, dessen Ton dann vermittelt eines Monochordes und einer Normalstimmgabel auf Schwingungen pro Sek. reduziert wurde. Es ergab sich für die Frequenz

$$\nu = 50 \text{ per/sec.}$$

Die Ladung der Partikel erfolgte, wenn sie nicht an und für sich geladen erschienen, mit einem Radiumpräparat.

## § 3.

Es wurde zunächst versucht, ob die an einem und demselben Partikel durch Verwendung verschiedener Gleichspannungen hervorgerufenen Steig- und Fallgeschwindigkeiten zu dem gleichen Wert für die Beweglichkeit  $B$  führen, eine Untersuchung, die meines Wissens explizit für Teilchen dieser Größenordnung noch nicht durchgeführt wurde. Zu diesem Zwecke wurde ein geladenes Ag-Teilchen nach Einstellen einer bestimmten Gleichspannung durch abwechselndes Umlegen des Kommutators F. K. einigemal auf- und abgeführt und die Durchgänge durch zwei Horizontalstriche des Mikrometers 1 mittelst des Morseapparates registriert, sowie die Spannung am Voltmeter abgelesen. Dann wurde der Vorgang für eine zweite Spannung wiederholt usw.

Aus Gleichung (6) in Teil II dieser Arbeit S. 83 geht hervor, daß man aus den gemessenen Fall- bzw. Steiggeschwindigkeiten das Produkt  $e B$ , das für ein und dasselbe Partikel eine Konstante sein soll, berechnen kann nach der Formel

$$(2) \quad e B = \frac{v_f + v_s}{2 E}$$

( $E$ : elektrische Feldstärke im Kondensator), während sich aus Gleichung (5) a. a. O. die ebenfalls konstante Größe

$$(3) \quad B m g = \frac{v_f - v_s}{2}$$

bestimmen lassen muß.

Da es sich uns zunächst nur um relative Vergleichen handelt, sind unter den Angaben der folgenden Tabelle die Geschwindigkeiten als Mikrometerteile pro Sekunde und die Feldstärken als die am Voltmeter abgelesenen Spannungen in Volt eingesetzt.

Die Tab. 1 enthält die Meßergebnisse für sämtliche beobachtete Teilchen. Man ersieht aus ihr, daß in der Tat mit ziemlicher Genauigkeit das Produkt  $e B$  für jedes Teilchen eine Konstante ist, während die analogen Produkte  $B m g$  zwar keinen systematischen Gang mit der verwendeten Spannung, wohl aber eine große Streuung bezüglich der Fehler aufweisen, was sich darauf zurückführen läßt, daß die erstere Größe durch Summation, die letztere hingegen durch Differenzbildung zweier mit Fehlern behafteter Größen hervorgeht,

wodurch sich, wie man unmittelbar sieht, im letzteren Falle die relativen Fehler vergrößern.

Tabelle 1.<sup>1)</sup>

Nr.	$v_f$	$v_s$	$E$	$e B$	$Bmg$	$\overline{e B}$ (Mittel)	$\overline{Bmg}$ (Mittel)
1	0,588	0,214	12,02	0,0334	0,374	0,0314	0,239
	0,658	0,483	19,0	0,0300	0,175		
	0,926	0,758	27,4	0,0307	0,168		
2	0,233	0,110	7,8	0,0220	0,123	0,0234	0,145
	0,357	0,265	14,0	0,0222	0,092		
	0,714	0,493	23,2	0,0261	0,219		
3	0,690	0,588	22,4	0,0285	0,102	0,0288	0,125
	0,455	0,286	12,2	0,0304	0,169		
	0,280	0,137	7,0	0,0298	0,143		
4	0,156	0,068	4,2	0,0266	0,088	0,0091	0,195
	0,272	0,108	23,4	0,0081	0,164		
	0,405	0,179	28,8	0,0101	0,226		
5	0,361	0,226	11,2	0,0261	0,135	0,0272	0,117
	0,274	0,138	7,2	0,0286	0,136		
	0,211	0,0725	4,8	0,0295	0,138		
6	0,667	0,505	23,8	0,0246	0,162	0,0110	0,188
	0,704	0,617	25,6	0,0257	0,087		
	0,541	0,488	19,4	0,0265	0,053		
7	0,476	0,323	14,0	0,0284	0,154	0,0388	0,056
	0,341	0,270	10,8	0,0283	0,071		
	0,448	0,165	27,2	0,0112	0,283		
	0,382	0,116	19,6	0,0127	0,266	0,0110	0,188
	0,260	0,082	14,2	0,0120	0,178		
	0,0967 (fr. Fall)						
	(Schwebespann.)	10,4	0,0093	0,097		0,0388	0,056
	0,377	0,225	27,8	0,0108	0,152		
	0,281	0,126	20,2	0,0101	0,155		
	0,549	0,500	13,8	0,0380	0,049	0,0388	0,056
	0,459	0,407	10,8	0,0400	0,052		
	0,294	0,294	7,2	0,0407	0,000		
	0,206	0,137	4,4	0,0390	0,069	0,0388	0,056
	0,633	0,676	17,0	0,0385	0,043		
	0,990	0,909	24,9	0,0380	0,081		
	0,546	0,450	13,4	0,0371	0,096		

Dieser Umstand muß berücksichtigt werden, wenn man, wie es gewöhnlich geschieht, aus  $Bmg$  durch Vermittelung eines Widerstandsgesetzes die Beweglichkeit  $B$  und damit die Ladung  $e$  des Teilchens ermittelt, insbesondere, wenn es sich um die Entscheidung der Frage handelt, ob diese Ladung ihrer Konstitution nach atomistisch oder kontinuierlich teil-

1) Die angegebenen Werte für  $v_f$  und  $v_s$  sind Mittelwerte aus je 9—15 Einzelmessungen.

bar ist. Wie die Spalte 6 der Tab. 1 zeigt und wie auch aus den Resultaten von Teil II dieser Arbeit hervorgeht, erscheint es kaum möglich, aus Messungen dieser Art irgend etwas Positives zur Entscheidung der Frage beizutragen.

#### § 4.

Wie bereits in der Einleitung hervorgehoben, schien es erwünscht, zu erproben, ob das Gesetz (1) auch dann noch erfüllt sei, wenn es sich nicht um die relativ kleinen und gleichförmigen Geschwindigkeiten des vorigen Paragraphen handelt, sondern um eine rasch oszillierende Bewegung, wie sie hervorgerufen werden kann, wenn man das geladene Teilchen einem elektrischen Wechselfelde hoher effektiver Spannung aussetzt.

Solche Messungen sind bereits früher von Frl. A. Snethlage<sup>1)</sup> auf einem, dem meinigen ganz analogen Wege angestellt worden und führten zu dem von der Verfasserin selbst allerdings als ziemlich roh bezeichneten Resultat, daß die Beweglichkeit gegenüber einer solchen schwingenden Bewegung für ein und dasselbe Teilchen größer sei, als gegenüber einer gleichförmigen Bewegung. Es erschien mir wünschenswert, diese Messungen unter Variierung der Versuchsbedingungen und im Zusammenhang mit den anderweitigen hier durchgeführten Untersuchungen nochmals zu wiederholen.

Die Theorie dieser Art der Beobachtung ist die folgende: Die Teilchen führen unter dem Einflusse der periodischen Kraft des Feldes, die wir als einfache Sinusfunktion annehmen wollen, eine erzwungene Bewegung, ohne Richtkraft aus, mit einem Widerstande, der aus Gleichung (1) entnommen, zu folgender Bewegungsgleichung führt

$$(4) \quad m \frac{d^2 x}{dt^2} = - \frac{1}{B} \frac{dx}{dt} + A \sin 2 \pi \nu t,$$

worin  $m$  die Masse des Teilchens,  $\nu$  die Frequenz des verwendeten Wechselstromes und  $A$  die Amplitude der elektrischen Feldkraft bedeutet.<sup>2)</sup> Die Integration dieser Differentialgleichung

1) A. Snethlage, Versl. K. Akad. v. Wetensch. Amst. 25. S. 1173. 1917.

2) Hierbei ist zu berücksichtigen, daß eigentlich infolge des Umstandes, daß es sich hier um eine periodische Bewegung in einer zähen Flüssigkeit handelt, unter  $m$  die sog. „hydrodynamische Masse“ und unter  $B$  die Beweglichkeit gegenüber periodischer Bewegungen zu verstehen wären, die sich von den Werten gegenüber gleichförmiger Bewe-

führt zu folgendem Wert für die Amplitude  $H$  der Teilchenschwingung

$$(5) \quad H = \frac{A}{2\pi\nu m \sqrt{(2\pi\nu)^2 + \frac{1}{m^2 B^2}}}$$

In dem für die Praxis allein wichtigen Fall ist nun  $(2\pi\nu)^2$  gegen  $\frac{1}{m^2 B^2}$  völlig zu vernachlässigen, so daß also Gleichung (5) die einfache Gestalt annimmt

$$(6) \quad H = \frac{A B}{2\pi\nu}$$

Führen wir nun statt  $A$  die am Elektrometer ablesbare effektive Spannung  $V$  ein, die mit  $A$  durch die Beziehung zusammenhängt

$$(7) \quad A = \frac{V \cdot \sqrt{2} \cdot e}{d}$$

( $d$ : Plattendistanz im Kondensator), so erhalten wir schließlich für die Amplitude der Schwingung den Ausdruck

$$(8) \quad H = \frac{1}{\nu \pi d \sqrt{2}} \cdot V \cdot e B,$$

woraus sich bei Kenntnis der Größen  $V$  und  $H$  das Produkt  $e B$  berechnen und mit dem aus den Geschwindigkeiten  $v_e$  und  $v_f$  erfließenden vergleichen läßt.

Die betreffenden Messungen wurden nun so durchgeführt, daß ein geeignetes Teilchen durch Anwendung von Gleichspannung zunächst im Gesichtsfelde einmal hin und her geführt und seine Geschwindigkeit mittels des Okularrasters 2 und des Morseapparates gemessen wurde, worauf man durch Umlegen des Umschalters  $U_3$  eine Wechselspannung an den Kondensator anlegte, die den leuchtenden Punkt des Teilchens in eine vertikale Lichtlinie von der Länge  $2H$  auseinanderzog. Die Länge dieser Linie wurde mittels des Okularrasters gemessen, was jedoch, da das Teilchen im Gesichtsfelde nicht ruhig bleibt, sondern langsam nach aufwärts wandert, nur mit einer Genauigkeit von  $\pm 1$  Teilstrich des Mikrometers zu erzielen ist.

Um zunächst die Proportionalität von  $H$  mit der Größe der effektiven Wechselspannung zu erweisen, wurden einige Messungen in der Weise angestellt, daß ein und dasselbe Teilchen

unterscheiden (vgl. z. B. Lamb, *Hydrodynamik*, 1907, S. 726, Formel 26). Wie jedoch eine Überslagsrechnung zeigt, sind die dadurch verursachten Abweichungen in unserem Falle ohne Belang.



verschiedenen Wechselfspannungen ausgesetzt und die jeweilige Amplitude gemessen wurde. Die Tab. 2 enthält in der ersten Spalte die Protokollnummer, in der zweiten die Amplitude in Mikrometerpartes, in der dritten die effektiven Spannungen in Volt und in der vierten den Quotienten beider Größen, der nach der Theorie konstant sein soll, was, wie man sieht, innerhalb der Fehlergrenzen in der Tat zutrifft.

Tabelle 2.

Nr.	$2H$	$V$	$V/2H$
8	9	2100	233
	7	1630	232
	6	1420	235
9	5	2150	431
	4	1890	472
	3,5	1630	465
10	2	580	288
	3	1000	332
11	1,5	630	420
	2,5	1000	398
25	2	630	314
	3	970	323
	5—6	1450	286—238
	8	2290	286

Die in der folgenden Tab. 3 enthaltenen Messungen wurden auf die oben beschriebene Weise angestellt und enthalten in der ersten Spalte die Protokollnummer, in der zweiten und dritten die Fall- und Steiggeschwindigkeiten in Mikrometer-teilen pro Sekunde, sowie in der vierten die Spannungen in Volt bei der Bewegung im Gleichfelde, in der fünften Kolonne die Amplituden und in der sechsten die Spannungen bei der Bewegung im Wechselfelde, schließlich in der siebenten und achten Kolonne die aus diesen beiden Arten der Bewegung erfließenden Werte für  $eB$ , bezeichnet als  $(eB)_g$  bzw.  $(eB)_w$  in absolutem Maße.

Man sieht, daß in den meisten Fällen die Differenz zwischen den so gewonnenen Werten von  $(eB)_g$  und  $(eB)_w$  in der Größenordnung der durch die Angaben des Elektrometers und der Ablesung der Amplituden bedingten Fehler liegt. Auffallend ist jedoch immerhin die Tatsache, daß sämtliche beobachteten  $(eB)_w$  größer als  $(eB)_g$  sind, in Übereinstimmung mit den a. a. O. erwähnten Beobachtungen von Snethlage.

Tabelle 3.<sup>1)</sup>

Nr.	$v_f$	$v_s$	$V_g$	$2H$	$V_w$	$(e B)_g \cdot 10^3$	$(e B)_w \cdot 10^3$
12	2,51	1,12	10,8	2,5	1575	16,45	17,2
13	1,69	1,02	7,0	3	1575	19,02	20,8
14	3,41	1,61	11,2	3—4	1575	22,0	20,8—27,6
15	5,30	3,70	10,6	3	1575	41,5	41,5
16	4,59	2,24	8,8	6—7	1520	38,0	43,0—50,0
17	3,83	1,15	8,8	5	1575	27,8	34,5
18	4,55	2,17	8,8	6	1575	37,5	41,5
19	4,57	3,46	12,8	7—8	2150	30,6	35,3—40,4
20	4,52	3,70	15,0	7	2625	26,9	29,0
21	1,95	1,69	5,4	7—8	2150	33,0	35,3—40,5
22	2,66	2,14	18,6	1,5	735	12,65	22,0
23	2,70	1,00	20,6	1	755	8,80	14,41
24	3,70	1,81	9,8	2,5	775	27,6	34,6
25	3,70	1,93	28,7	$V/H$ (mittel)	296 <sup>2)</sup>	28,7	33,7—45,8
26	4,27	2,91	18,3	2	745	19,21	28,8

Fraglich muß es jedoch erscheinen, ob man berechtigt ist, aus dieser Tatsache einen Schluß auf die nicht strenge Gültigkeit der Gleichung (1) bei so raschen Bewegungen zu ziehen, da ja die Annahme, daß die Wechselspannung eine reine Sinusfunktion sei, in unserem Falle sicher nicht gerechtfertigt ist, vielmehr streng genommen auch noch die überlagerten Oberschwingungen berücksichtigt werden müßten. Es ist möglich, daß die beobachteten Abweichungen auf diese Vernachlässigung zurückzuführen sind:

Auf jeden Fall ist die systematische Abweichung, wenn es sich ja um eine solche handeln sollte, so klein, daß man mit großer Näherung das Gesetz (1) auf jeden Fall auch bei solchen rasch oszillierenden Bewegungen als gültig ansehen kann. Der Geschwindigkeitsbereich, in dem also die Anwendbarkeit der Formel erprobt erscheint, erstreckt sich etwa von der Größenordnung  $5 \cdot 10^{-3}$  cm/sec für die Bewegungen im Gleichfeld bis zu einer mittleren Geschwindigkeit von der Größenordnung 1 cm/sec bei der Bewegung im Wechselfelde, wobei

1) Die angegebenen Werte für  $v_f$  und  $v_s$  sind Mittelwerte aus je 50—150 Einzelmessungen.

2) Mittelwert aus den in Tab. 2, Spalte 4 angegebenen Werten.

aber in der Nähe der Mitte der Schwingungsbahn des Teilchens die Geschwindigkeit noch größer anzusetzen ist.<sup>1)</sup>

Aus dem Gleichverteilungssatz kann man nun für Partikel der verwendeten Größenordnung die mittlere Geschwindigkeit bei ihrer Brownschen Bewegung ausrechnen und erhält dafür der Größenordnung nach etwa 3 cm/sec, was also mit der Bewegung im Wechselfelde um so eher vergleichbar erscheint, als es sich ja auch hier um eine rasch zitternde Bewegung handelt.

Es erscheint mir daher berechtigt, aus dem Vorhergehenden den Schluß zu ziehen, daß für die geradlinige Bewegung eines Teilchens unter dem Einfluß einer konstanten Kraft dasselbe Widerstandsgesetz Gültigkeit habe, wie für die Brownsche Molekularbewegung, eine Annahme, die ja übrigens bis jetzt allgemein gemacht worden ist, aber ohne eine genügende Stütze keineswegs von vornherein als plausibel angesehen werden kann.

Es ist also gestattet, bei Teilchen dieser Größenordnung aus Messungen der Brownschen Bewegung, vorausgesetzt, daß man zu ihrer Auswertung ein einwandfreies Rechenverfahren benützt, die Beweglichkeit der Teilchen zu bestimmen.

#### § 5.

Nach dem im vorigen Paragraphen Auseinandergesetzten können wir also daran gehen, die aus der Brownschen Bewegung an einem Einzelteilchen berechneten Beweglichkeitswerte mit jenen zu vergleichen, die sich aus den an demselben Teilchen gemessenen Steig- und Fallgeschwindigkeiten bei Zugrundelegung eines bestimmten Widerstandsgesetzes ergeben, ohne befürchten zu müssen, daß den ersteren Werten ein

1) Die genuae Gültigkeit von Gleichung (7) ist inzwischen durch Versuche von N. A. Shewhart (Phys. Rev. (2) 9, S. 425. 1917) und R. B. Albott (Phys. Rev. (2) 12, S. 381. 1918), die mir aber im Originale nicht zugänglich waren, für noch größere Geschwindigkeiten von  $v = 10$  bis 75 cm/sec an Öl- und Wassertropfen, sowie Lykpodiumteilchen erwiesen worden, indem die Partikel zwischen parallelen, vertikalen Kondensatorplatten gleichzeitig der Wirkung der Schwerkraft und der eines horizontalen Wechselfeldes von 28000 Volt und 60 per/sec ausgesetzt wurden. Es zeigte sich, daß die so beschriebene Bahn rein sinusförmig war und daß ihre Amplitude der Feldstärke proportional war. Diese Resultate sprechen für die Richtigkeit der obigen Überlegungen.

wesentlicher, verfälschender Einfluß zugesellt sei. Eine solche Vergleichung ist ja bereits in Teil II dieser Arbeit, S. 89, durchgeführt worden und hatte das Ergebnis, daß für Metallpartikel die Brownsche durchwegs unterhalb derjenigen Beweglichkeit lag, die sich aus dem Stokesschen oder dem Cunninghamschen Gesetz ergab, bei Ölpartikeln hingegen meist oberhalb. Während die Beobachtungen an letzterem Material durch allmähliches Verdampfen der Öltropfen sicher verfälscht sind, läßt sich ein Grund für die Abweichung an den Metallpartikeln darin finden, daß bei der Berechnung der Brownschen Beweglichkeit aus den Abweichungen von den konstanten Steig- und Fallzeiten ein systematischer Fehler stets zu kleine Resultate vortäuscht.<sup>1)</sup>

Um diesen Fehler zu entgehen, wurde diesmal die Brownsche Beweglichkeit nach der vom Verfasser mit dem Namen der Messung von „mittleren, doppelseitigen Erstdurchgangszeiten“ bezeichnete Methode<sup>2)</sup> verwendet, indem vermittelt des Morseapparates jeder Durchgang eines Teilchens durch einen Vertikalstrich des Okularrasters registriert und aus allen, zwischen zwei aufeinanderfolgenden Durchgängen liegenden Zeiten das Mittel genommen wurde. Aus diesen doppelseitigen horizontalen Erstdurchgangszeiten  $\vartheta$  ergibt sich nach der a. a. O., S. 183 mitgeteilten Formel die Beweglichkeit aus

$$(9) \quad 2D = \frac{b^2}{\vartheta}, \quad D = \frac{R}{N} T \cdot B$$

( $D$ : Diffusionskoeffizient;  $b$ : Rasterintervall;  $R$ : absolute Gaskonstante;  $N$ : Loschmidtsche Zahl;  $T$ : absolute Temperatur).

Die Stokessche bzw. Cunninghamsche Beweglichkeit folgt aus den Formeln Teil II, S. 88 Formel (4) bzw. (4').

Es wurden nun für eine Anzahl von Ag-Teilchen Beobachtungen dieser Art angestellt, deren Ergebnis die folgende Tabelle 4 enthält. Die Werte der zur Berechnung verwendeten Konstanten sind dieselben, wie früher, bis auf die Dichte des Ag:  $\sigma = 10.5$ .

Wie man sieht, fällt  $B_{Br}$  innerhalb der, wie bereits oben erwähnt, beträchtlichen Fehlergrenzen, durchwegs mit den  $B_{St}$  zu-

1) R. Fürth, Ann. d. Phys. 59, S. 409ff. 1919.

2) R. Fürth, Ann. d. Phys. 53, S. 177. 1917.

sammen, während die  $B_e$  meist eine ganze Größenordnung höher liegen als diese. Da nach dem Obigen kein Grund vorliegt, an der Richtigkeit der  $B_{Br}$  zu zweifeln, werden wir neuerlich, und diesmal schärfer, zu der bereits in Teil II am Schlusse dargelegten Meinung gedrängt, daß die Cunninghamsche Korrektur am Stokesschen Gesetz nicht den tatsächlichen Verhältnissen gerecht wird, sondern vielmehr das unkorrigierte Stokessche Gesetz zur Anwendung zu kommen hat.

Tabelle 4.

Nr.	$B_{Cc} \cdot 10^{-8}$	$B_{St} \cdot 10^{-8}$	$B_c \cdot 10^{-8}$
14	0,326	0,256	0,740
17	0,286	0,210	0,500
20	0,318	0,380	1,220
21	0,257	0,393	9
22	0,287	0,368	3,22
27	0,236	0,271	0,81
28	0,222	0,331	1,26
29	0,329	0,325	1,20
30	0,348	0,250	0,698
31	0,165	0,250	0,710
32	0,239	0,256	0,740
33	0,367	0,246	0,68
34	0,240	0,311	1,14
35	0,311	0,342	1,35
36	0,260	0,339	1,28
37	0,249	0,285	0,92

Da seiner theoretischen Begründung nach das Stokessche Gesetz eine vollständige Mitnahme des umgebenden Mediums durch die bewegte Kugel verlangt, das Cunninghamsche Gesetz jedoch eine Mitnahme nur insofern, als sie durch die Stöße der Mediummoleküle auf die Kugeloberfläche bedingt werden, scheint es nach unseren obigen Überlegungen, als ob von dem Partikel in der Tat an seiner Oberfläche das umgebende Gas vollständig mitgeführt wird, was mir durchaus plausibel erscheint, da ja die Annahme einer an der Oberfläche fester Körper haftenden Gashaut, die auf gewisse Adhäsionskräfte zwischen Gas und festem Körper ungezwungen zurückgeführt werden kann, geläufig ist.

## § 6.

Mit der Frage der Gültigkeit eines bestimmten Widerstandsgesetzes hängt in der innigsten Weise auch die nach der

Größe der auf den Partikeln sitzenden Ladungen zusammen, da ja diese aus der bekannten Größe von  $eB$  einerseits und von  $B$  andererseits berechnet wird. Die bekannten Arbeiten über Ladungsbestimmungen an Einzelpartikeln der Ehrenhaftschen Schule verwenden ausschließlich die Cunninghamsche Korrektur des Stokesschen Gesetzes und es geht aus Tab. 4 hervor, daß im Falle dieses Gesetz in der Tat nicht richtig sein sollte, zu große Werte der Beweglichkeit, also zu kleine Werte der Ladung vorgetäuscht werden müssen. Und diese Differenz vergrößert sich um so mehr, zu je kleineren Partikeln man übergeht, da der Unterschied zwischen den beiden Widerstandsgesetzen immer größer wird, und schließlich mit fallendem Partikelradius rapide ansteigt.

Ohne hier die strittige Frage nach der Größe dieser Ladungen irgendwie beantworten zu können, gebe ich doch, wie in Teil II dieser Arbeit die Resultate der Ladungsbestimmungen an den von mir beobachteten Ag-Partikeln in der Tabelle V wieder, wobei jedesmal aus  $v_s$ ,  $v_f$  und  $v_g$  das Produkt  $eB$  und vermittelt Zugrundelegung eines der Widerstandsgesetze bzw. aus der Brownschen Bewegung das  $B$  und damit das  $e$  berechnet wurde.

Man ersieht aus der Tabelle 5, daß durchweg die Ladungen  $e_e$  kleiner sind, als die analogen  $e_{st}$  bzw.  $e_{Br}$ , während die beiden letzten dieselbe Größenordnung besitzen. Jedenfalls auffallend ist die Tatsache, daß diese letzteren Ladungswerte sämtlich in der Größenordnung des üblichen Elektrons liegen, wenn sie auch keineswegs als ganzzahlige Vielfache dieser Größe aufgefaßt werden können und auch öfters Unterschreitungen des Millikanschen Wertes  $4,77 \cdot 10^{-10}$  auftreten.

Da uns dieses Ergebnis bereits in derselben Weise in Teil II an den Ladungen von Hg- und Ölteilchen entgegengetreten ist, scheint es in Anbetracht der prinzipiellen Wichtigkeit derartiger Messungen dringend notwendig, die wahre Gestalt des Widerstandsgesetzes in Gasen an kleinen Materiepartikeln einwandfrei zu ermitteln. Der Verfasser hofft, auf Grund bereits ins Werk gesetzter Versuche bald in der Lage sein zu können, die Frage im Sinne der Festlegung eines bestimmten Widerstandsgesetzes in Gasen entscheiden zu können.

Tabelle 5.

Nr.	$e_c \cdot 10^{10}$	$e_{st} \cdot 10^{10}$	$e_{Br} \cdot 10^{10}$
1	3,12	8,97	
2	1,328	5,22	
3	1,45	5,96	
4	0,742	2,47	
5	1,266	5,44	
6	0,856	2,82	
7	0,684	5,35	
12	1,71	5,69	
13	0,858	4,54	
14	2,97	8,59	6,72
15	5,19	15,3	
16	6,66	16,9	
17	5,55	13,22	9,72
18	6,58	16,9	
19	2,55	9,42	
20	2,20	7,06	8,45
21	0,367	8,40	12,82
22	0,393	3,45	4,37
23	1,142	3,34	
24	3,96	11,05	
25	3,83	11,15	
26	2,025	6,68	
27	4,63	13,81	15,85
28	1,13	4,30	6,40
29	1,165	4,30	4,24
30	1,222	3,41	2,45
31	2,27	6,48	9,80
32	1,298	3,74	4,02
33	4,51	12,42	8,33
34	2,54	9,30	12,06
35	1,835	7,25	7,95
36	2,20	8,32	10,81
37	2,22	7,19	8,22

**Zusammenfassung.**

Es wird untersucht, ob die Beweglichkeit eines in einem Gase bewegten kleinen Metallpartikels von der Geschwindigkeit und dem Charakter dieser Bewegung innerhalb gewisser Grenzen unabhängig sei. Zu diesem Zwecke werden elektrisch geladene Ag-Kügelchen mittels der Ehrenhaftschen Versuchsanordnung beobachtet und konstatiert, daß

1. Das Produkt  $eB$ , für ein und dasselbe Partikel berechnet, aus verschiedenen Steig- und Fallgeschwindigkeiten im elektrischen Felde unter dem Einfluß verschiedener Feldkräfte konstant ist.

2. Daß auch für rasch oszillierende Bewegungen im elektrischen Wechselfelde das Produkt  $eB$ , berechnet aus der Amplitude der Teilhenschwingung in derselben Größe herauskommt, als der nach Methode 1. Dabei wurde sowohl die effektive Spannung des Wechselfeldes als auch die Spannung des Gleichfeldes innerhalb weiter Grenzen verändert. Eine kleine systematische Vergrößerung der  $(eB)_w$  gegenüber den  $(eB)_g$  ist vielleicht auf Vernachlässigung der elektrischen Oberschwingungen zurückzuführen.

3. Da auch die Brownsche Bewegung den Charakter einer solchen oszillierenden Bewegung mit etwa derselben mittleren Geschwindigkeit besitzt, so kann man schließen, daß die Beweglichkeitsbestimmungen an Einzelteilchen aus der Brownschen Bewegung nach einer einwandfreien Rechenformel (mittlere doppel-seitige Erstdurchgangszeiten) zu richtigen Werten für  $B$  führen.

4. Berechnet man einerseits für ein und dasselbe Partikel die Beweglichkeit durch Messung der Brownschen Bewegung nach der Methode der „doppelseitigen horizontalen Erstdurchgangszeiten“ und andererseits aus Steig- und Fallbeobachtungen unter Zugrundelegung eines bestimmten Widerstandsgesetzes, so findet man innerhalb der Grenzen der Beobachtungsfehler zwar Übereinstimmung zwischen der Brownschen und der nach dem Stokesschen Gesetz berechneten Beweglichkeiten, hingegen kommen die nach Cunninghamham berechneten durchwegs kleiner heraus. Es wird daher die Ansicht ausgesprochen, daß das letztere Gesetz den tatsächlichen Verhältnissen nicht entspricht.

5. Berechnet man aus den gemessenen Steig- und Fallzeiten die Partikelladungen nach einer der drei Methoden  $e_{Br}$ ,  $e_{St}$ ,  $e_c$ , so findet man ungefähre Übereinstimmung zwischen  $e_{Br}$  und  $e_{St}$ , während  $e_c$  viel kleiner herauskommt. Die ersteren Ladungswerte liegen alle in der ungefähren Größenordnung des üblichen Elektrons, lassen sich aber nicht als ganzzahlige Vielfache eines Elementarquantums dieser Größenordnung auffassen.

Die endgültige Festlegung des Widerstandsgesetzes in Gasen für Kugeln der verwendeten Größenordnung erscheint als ein dringendes Desideratum, Versuche zur Klärung dieser Frage werden in Aussicht gestellt.

Prag, im Mai 1920.

(Eingegangen 22. Mai 1920.)



### **3. Bestimmung der Wärmeleitfähigkeit des Wassers im Bereich von 0 bis 80°; von Max Jakob.**

(Mitteilung aus der Physikalisch-Technischen Reichsanstalt.)

#### **A. Allgemeines.**

Das Wärmeleitvermögen des Wassers und anderer Flüssigkeiten in Abhängigkeit von der Temperatur mit Sicherheit zu kennen, ist von großer Wichtigkeit sowohl für die Theorie der Flüssigkeiten<sup>1)</sup> als auch für die technische Beurteilung von Strömungs- und Wärmeübertragungsverhältnissen in Flüssigkeiten und Gasen auf Grund der Ähnlichkeitsgesetze.<sup>2)</sup> Diese Größe ist daher auch von vielen Forschern und nach den verschiedensten Methoden gemessen worden. Deren Ergebnisse weichen aber weit voneinander ab, wie aus Fig. 1 ersichtlich ist. Nicht nur die Absolutwerte sind zum Teil auf 10% und mehr unsicher; es ist auch in den Messungen der letzten 50 Jahre keine kontinuierliche Annäherung an einen wahrscheinlichsten Verlauf der Wärmeleitfähigkeit mit der Temperatur zu erkennen, sondern ein gesetzloses Pendeln zwischen größeren und kleineren Werten; ja es ist noch nicht einmal entschieden, ob das Wärmeleitvermögen mit zunehmender Temperatur zu- oder abnimmt. Oberhalb von 47° endlich sind überhaupt noch keine Messungen vorgenommen worden.

Als nun an die Reichsanstalt aus der Praxis der Antrag gestellt wurde, die Wärmeleitfähigkeit eines Transformatoröles

1) Vgl. z. B. H. F. Weber, Sitzungsber. d. Berl. Akad. 1885. S. 809; R. Goldschmidt, Phys. Zeitschr. 12. S. 417. 1911.

2) Vgl. z. B. W. Nusselt, Der Wärmeübergang in Rohrleitungen (Mitt. über Forschungsarb. auf d. Gebiete d. Ingenieurwesens, Heft 89. S. 1. 1910); L. Prandtl, Eine Beziehung zwischen Wärmeaustausch und Strömungswiderstand der Flüssigkeiten (Phys. Zeitschr. 11. S. 1072. 1910); W. Nusselt, Das Grundgesetz des Wärmeüberganges (Gesundheits-Ingenieur 38. S. 477 u. 490. 1915); W. Nusselt, Die Oberflächenkondensation des Wasserdampfes (Zeitschr. d. Ver. deutsch. Ing. 60. S. 541. 1916.)

zwischen 20 und 70° zu bestimmen (als Grundlage für die Berechnung von Transformatorkühlern im Sinne der Nusselt-

kcal m<sup>-1</sup> Stunde<sup>-1</sup> Grad<sup>-1</sup>

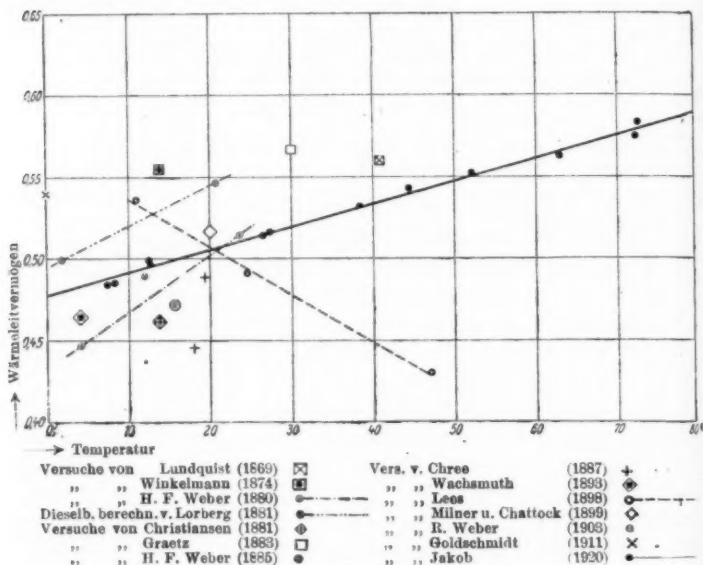


Fig. 1.

schen Untersuchungen), da zeigte es sich, daß keine der bekannten Methoden diese Bestimmung mit Sicherheit erlaubte, und es war erforderlich, eine neue Methode auszuarbeiten. Es lag dann nahe, mit diesem Verfahren eine genaue Bestimmung der Wärmeleitfähigkeit des Wassers auszuführen.<sup>1)</sup>

#### B. Die bisher angewandten Verfahren und ihre Ergebnisse.

Zunächst sollen nun die bisher angewandten Verfahren in zeitlicher Folge einer kritischen Betrachtung unterzogen werden. Wir werden dabei wichtige Einzelheiten kennen lernen, die nur übernommen zu werden brauchten, und andererseits Fehler, die bei unseren Versuchen vermieden werden mußten.

1) Ein kurzer Bericht ist bereits in den Sitzungsber. d. Berl. Akad. d. Wiss. 1920. S. 406 veröffentlicht.

1. Von den ältesten Bestimmungen verdient nur die von Lundquist<sup>1)</sup> Erwähnung. Dieser hat eine in einen Glaszylinder eingefüllte Wassermenge nach Ångströms Vorgang periodischer Erwärmung und Abkühlung unterworfen und aus dem Temperaturverlauf zweier Quecksilberthermometer, die mit 25 mm vertikalem Abstand horizontal in den Glaszylinder eingeführt waren, bei 40,8° die Wärmeleitfähigkeit

$$\lambda = 0,559, [\text{kcal} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{Stde}^{-1} \cdot \text{Grad}^{-1}]$$

gefunden. Die absolute Genauigkeit der Methode läßt sich schwer beurteilen; möglicherweise ist der Wärmeübergang durch Konvektion bei den wechselnden Temperaturen etwas vergrößert; die Einzelbeobachtungen weichen um höchstens 5<sup>0</sup>/<sub>10</sub> voneinander ab.

2. Winkelmann<sup>2)</sup> hat die zu untersuchende Flüssigkeit in den 2 bis 5 mm weiten Ringraum zwischen zwei konzentrischen, vertikalen Messingzylindern gebracht und die Abkühlung der Luft im inneren Zylinder gemessen, nachdem der ganze Apparat in Eis gesteckt war. Infolge der Flüssigkeitsströmung in der Ringschicht, ist sein Wert  $\lambda = 0,554$ , bei 14° viel zu hoch, wie H. F. Weber<sup>3)</sup> ausführlich nachgewiesen hat.

3. Letzterer Forscher hat in der gleichen Abhandlung eine bemerkenswerte neue Methode angegeben. Das Wasser wurde dabei zwischen zwei kreisförmige, horizontale, durch kleine Glasstückchen voneinander getrennte Kupferplatten gebracht und durch seine eigene kapillare Spannung am Rand vor dem Ausfließen bewahrt. In einem bestimmten Augenblick wurde nun die untere Kupferplatte auf eine horizontale Eisfläche, bzw. mit einem kühlenden Wasserstrom in Berührung gebracht und das Plattensystem mit einer Kupferhaube von der Temperatur des Kühlmittels überdeckt. Aus der zeitlichen Temperaturabnahme und verschiedenen Konstanten der Anordnung ließ sich dann die Wärmeleitfähigkeit des Wassers berechnen, wenn noch die äußere Wärmeableitung des Plattensystems durch besonderen Versuch bestimmt war. So erhielt Weber

1) C. G. Lundquist, Upsala Universitets Årsskrift 1869. 29 S.

2) A. Winkelmann, Pogg. Ann. 153. S. 481. 1874.

3) H. F. Weber, Wied. Ann. 10. S. 103, 304 u. 472. 1880.

für  $4,1^{\circ}$   $\lambda = 0,447_0$  und

für  $23,7^{\circ}$   $\lambda = 0,514_2$

und hieraus unter Annahme linearer Zunahme mit der Temperatur  $t$  die Gleichung

$$(1) \quad \lambda = 0,433_2 (1 + 0,00786 t)$$

(Strichpunktierte Gerade in Fig. 1).

4. Lorberg<sup>1)</sup> hat Webers Berechnungsmethode angezweifelt und abgeändert. Er berechnet aus Webers Versuchen

für  $1,9^{\circ}$   $\lambda = 0,499_0 - 0,000046 h$ ,

für  $20,8^{\circ}$   $\lambda = 0,546_5 - 0,000046 h$

als wahrscheinlichste Werte.<sup>2)</sup> Dabei ist  $h$  die äußere Wärmeleitfähigkeit der Wasserlamelle. Weber hat diese vernachlässigt; Lorberg macht zwar darauf aufmerksam, daß in  $h$  ein Betrag für die Verdampfung am Rand enthalten sei, hält aber  $h/\lambda$  für wesentlich kleiner als 1, wonach das Korrekturglied  $0,000046 h$  innerhalb der von Weber erstrebten Genauigkeit läge und somit zu vernachlässigen wäre.

5. Weber hat in einer späteren Veröffentlichung<sup>3)</sup>, laut welcher er den im Vergleich zur Formel (1) etwas höheren Wert  $\lambda = 0,489_8$  für  $12^{\circ}$  gefunden hat<sup>4)</sup>, Lorbergs Einwände erwähnt und eine Widerlegung in nahe Aussicht gestellt, eine solche aber offenbar ebensowenig veröffentlicht, wie das ebenfalls damals angekündigte ausführliche Versuchsmaterial.

Aus Fig. 1 ist ersichtlich, daß die von Lorberg berechneten Werte (obere strichpunktierte Gerade) bei  $4^{\circ}$  um etwa 10% höher sind als die von Weber berechneten. Es scheint jedoch, daß in Wirklichkeit  $\lambda$  zwischen beiden Geraden liegt. Die Verdampfung am Rand der Wasserlamelle macht nämlich mehr aus, als Lorberg angenommen hat, wie aus Webers

1) H. Lorberg, Wied. Ann. 14. S. 291 u. 426. 1881.

2) Nach seinen Ausführungen kann man die obigen Werte mit gleichem Recht auf 0 wie auf  $3,9^{\circ}$  und auf 18,5 wie auf  $23,2^{\circ}$  beziehen; ich habe daher die Mittelwerte  $1,9^{\circ}$  und  $20,8^{\circ}$  angenommen.

3) H. F. Weber, Sitzungsber. d. Berl. Akad. 1885. S. 809.

4) Die Temperatur ist in dieser Abhandlung nicht genau angegeben. Es ist nur erwähnt, daß sie zwischen  $9$  und  $15^{\circ}$  gelegen hat. Ich habe daher den Mittelwert  $12^{\circ}$  angenommen.

eigenen Angaben<sup>1)</sup> hervorgeht. Die von Lorberg unter Vernachlässigung der Verdampfungswärme berechneten Werte sind also zu hoch. Nach all dem sind Webers Werte so unsicher, daß es sich erübrigt, auf experimentelle Mängel, wie die Befestigung des Thermoelementes in der Mitte der oberen Kupferplatte, einzugehen.

6. Kurz nach Webers erster Untersuchung hat Christiansen<sup>2)</sup> die Wärmeleitfähigkeit des Wassers relativ zu Luft bestimmt, indem er drei Kupferplatten mit dünnen Zwischenschichten von Luft und Wasser übereinander anordnete und ihre Temperaturdifferenzen bestimmte, wenn Wärme im Dauerzustande von oben nach unten hindurchströmte. Die Luftschicht war dabei nur 0,2 mm stark; der geringste Feuchtigkeitsniederschlag auf den angrenzenden Kupferflächen mußte die Wärmeleitfähigkeit des Wassers zu gering erscheinen lassen. Christiansen fand bei 13,7° das Wärmeleitvermögen des Wassers 21,0 mal so groß als das der Luft bei 27,9°. Da das letztere nach den neuesten Versuchen

$$0,022 \text{ [kcal} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{Stde}^{-1} \cdot \text{Grad}^{-1}]$$

beträgt<sup>3)</sup>, so ergibt sich der in Fig. 1 eingetragene Wert  $\lambda = 0,462$ .

7. Während die bisher erwähnten Messungen an ruhendem Wasser angestellt sind, hat Graetz<sup>4)</sup> versucht, die Wärmeleitfähigkeit aus der Menge und dem Temperaturabfall der ein

1) Weber bemerkt (a. a. O. S. 305), daß die Flüssigkeit nach dem Einfüllen „rings an den Plattenrändern mit einem ca. 1 mm dicken, regelmäßig gekrümmten Bauch herausdrängte“ und sagt weiter: „Beim Einfüllen der Flüssigkeit wurde die Weite der Ausbauchung so groß gewählt, daß die nach erfolgter Abkühlung stattfindende Einbauchung von nahezu gleicher Größe war.“ Er legt das Zurücktretten des Flüssigkeitsrandes der Abkühlung (beim Aufbringen der Platten auf Eis) zur Last; durch diese hätte jedoch die Ausbauchung sich nur um wenige Hundertel mm verringern können. Die Einbauchung des Flüssigkeitsrandes ist in Wirklichkeit der Verdampfung zuzuschreiben. Da die Versuchsdauer nur wenige Minuten betrug, so verdampft dabei fast ebensoviel in die übergestülpte Kupferglocke von nicht bezeichneter Größe wie bei gleicher Temperatur und Luftfeuchtigkeit in die freie Atmosphäre. Vgl. hierüber auch S. 555 dieser Abhandlung.

2) C. Christiansen, Wied. Ann. 14. S. 23. 1881.

3) W. Nusselt, Gesundheitsingenieur, a. a. O.

4) L. Graetz, Wied. Ann. 18. S. 79. 1883.

enges Rohr von bestimmter niedrigerer Außentemperatur durchströmenden Flüssigkeit zu bestimmen. Er hat dabei — mit einer relativen Genauigkeit der Versuchspunkte von  $\pm 5\%$  — den Mittelwert  $\lambda = 0,567$ , für  $30^\circ$  gefunden, in einer späteren Abhandlung<sup>1)</sup> aber selbst ausgeführt, daß die Werte seiner früheren Arbeit zu groß sind.<sup>2)</sup>

8. Hieran schließt sich in zeitlicher Folge die Untersuchung von Chree<sup>3)</sup>, der auf der Oberfläche der einen vertikalen Zylinder erfüllenden Wassermenge eine Schale aufsetzte und das Wasser erwärmte, indem er in die Schale plötzlich heißes Wasser eingoß. Aus der Temperaturänderung eines in einiger Tiefe gespannten Platindrahtes versuchte er  $\lambda$  zu berechnen. Seine Versuche leiden aber außer an der Vernachlässigung des Einflusses der Randerscheinungen in dem Zylinder vor allem daran, daß die Wärmeabgabe des Wassers in der Schale an die Außenluft nur durch einen kaum einwandfreien Differenzversuch berücksichtigt wurde. Die von Chree gefundenen Werte (0,446<sub>4</sub>) (bei  $18^\circ$ ) und 0,488<sub>9</sub> (bei  $19,5^\circ$ ) weichen zudem auch voneinander um über  $9\%$  ab.

9. Die Webersche Lamellenmethode mit der Berechnungsweise von Lorberg hat Wachsmuth<sup>4)</sup> wieder aufgenommen. Sein Wert  $\lambda = 0,464_5$  für  $4,1^\circ$  liegt aber wesentlich unter dem, Lorbergschen Wert (vgl. Fig. 1).

10. Während aus den Versuchswerten von Lundquist, Weber, Graetz und Chree eine Zunahme der Wärmeleitfähigkeit mit der Temperatur mehr oder minder deutlich hervorzugehen scheint, hat Lees<sup>5)</sup> bei Wasser und anderen Flüssigkeiten eine beträchtliche Abnahme von  $\lambda$  mit zunehmender Temperatur gefunden. Er hat das Wärmeleitvermögen der Flüssigkeiten nicht absolut bestimmt, sondern relativ zu dem einer Glasplatte, deren Wärmeleitzahl er nach einem Verfahren für feste, schlechte Wärmeleiter absolut gemessen hat.

1) L. Graetz, Wied. Ann. 25. S. 337. 1885 (vgl. insbesondere S. 349).

2) Trotzdem glaubte ich, den obigen Wert nicht unterdrücken zu dürfen, da L. Graetz ihn in A. Winkelmanns Handbuch der Physik (3. S. 524. 1906) ebenfalls angeführt hat.

3) C. Chree, Proc. of the Roy. Soc. 42. S. 300 u. 43. S. 30. 1887.

4) R. Wachsmuth, Wied. Ann. 48. S. 158. 1893.

5) Ch. Lees, Phil. Trans. (A) 191. S. 399. 1898.

Dies Verfahren besteht darin, die in einem scheibenförmigen Heizkörper elektrisch erzeugte Energie durch mehrere daraufgesetzte Scheiben aus Kupfer und dem zu untersuchenden Stoff hindurchzutreiben und aus der Heizenergie und den Temperaturen der Kupferplatten im Dauerzustand die äußere und innere Wärmeleitfähigkeit zu berechnen. Dabei wird vorausgesetzt, daß bei gleicher Außentemperatur die Wärmeabgabe an die Luft nur von der Temperatur und Größe der Außenflächen der einzelnen Platten abhängig sei. Nun ist aber zu beachten, daß es nicht genügt, durch Firnissen gleichartige Oberflächen herzustellen und die Hauptflächen der Platten vertikal zu richten, wie dies Lees tut, daß vielmehr das äußere Wärmeleitvermögen  $h$  auch bei gleicher Oberflächenbeschaffenheit sehr wesentlich von der Form der Fläche abhängt<sup>1)</sup> und an den zylindrischen Rändern ganz anders sein wird als an den ebenen Endflächen, weil die Konvektion dabei verschieden ist. Dies hat Lees übersehen. Aber noch mehr; er berücksichtigt die Wärmeableitung durch die zur Messung der Plattentemperaturen angebrachten Thermoelemente, indem er einen gewissen Betrag zu der Dicke der betreffenden Kupferplatten hinzurechnet. Dabei nimmt er für Drähte von Zehnteln mm Stärke das gleiche  $h$  wie für seine Platten von 4 cm Durchmesser, während in Wirklichkeit  $h$  im ersteren Fall vielleicht viermal so groß ist.<sup>2)</sup> Da  $\sqrt{h}$  in Lees Gleichung eingeht, so wäre die Korrektur etwa zweimal so groß zu nehmen. Die Dicke der einzelnen Kupferplatten ist daher um den vollen Betrag der von Lees angegebenen Korrektur (der nicht weniger als 20 bis 30% der wirklichen Plattendicke ausmacht) zu gering angenommen, was allerdings zufällig infolge der Form der Gleichungen auf das Resultat nur einen Einfluß von einigen Prozenten ausübt. Auch die Befestigung der Thermoelemente ist nicht einwandfrei. Endlich wird die Gültigkeit der Formeln durch das viel zu kleine Verhältnis des (nur 4 cm betragenden) Durchmessers zu der Dicke der Platten beeinträchtigt. Es tritt nämlich eine erhebliche Krümmung der Wärmeströmungslinien in den Versuchsplatten auf, die nicht in Rechnung gesetzt ist.

1) Vgl. z. B. A. Winkelmann, Wied. Ann. 29. S. 68. 1886.

2) Vgl. W. Nusselt, Gesundheitsingenieur, a. a. O.

Aus all diesen Gründen wird man den Werten für Glas und andere feste Stoffe kaum eine große Genauigkeit zuschreiben dürfen. Messungen mit Flüssigkeiten darauf zu gründen, ist überaus gewagt.

Bei diesen Messungen strömte die Wärme durch eine ähnliche, aber horizontal gestellte Scheibenanordnung und zwar zunächst durch eine zwischen Kupferplatten eingelegte Glasplatte und dann durch eine Flüssigkeitsschicht von 37 mm Durchmesser, welche am Rand von einem Ebonitring von 16 mm Dicke umschlossen war. Aus dem Temperaturgefälle im Glas und in der Flüssigkeit, dem äußeren Wärmeleitvermögen  $h$  (welches aus den Beobachtungen an festen Körpern, ohne Berücksichtigung der veränderten Lage der Platten, mit großer Unsicherheit abgeleitet ist) und der Wärmeleitfähigkeit des Glases wurde nun die Wärmeleitfähigkeit der Flüssigkeit gewonnen. Dabei störte natürlich sehr, daß die Wärme zum Teil in den Ebonitrand strömte; diesen Betrag suchte Lees durch einen Differenzversuch, bei dem sich statt der Flüssigkeit Luft zwischen den unteren Platten und dem Ebonitring befand, zu eliminieren. Bezüglich der Messung und Auswertung gilt das oben über die Messungen an festen Körpern Gesagte.

Die von Lees für Wasser ermittelten Werte  $\lambda = 0,491_4$  für  $21\frac{1}{2}^\circ$  und  $\lambda = 0,430_2$  für  $47^\circ$ , aus denen er graphisch linear den Wert  $\lambda = 0,536_4$  für  $11^\circ$  extrapolierte (vgl. gestrichelte Gerade in Fig. 1), müssen daher als ganz unsicher bezeichnet werden. Dasselbe gilt für die Gleichung

$$(2) \quad \lambda = 0,566_2 (1 - 0,0052 t)$$

mittels deren man seine Werte am besten wiedergeben kann.

11. Im Gegensatz zu dieser Arbeit verdient die Untersuchung von Milner und Chattock<sup>1)</sup> wegen ihrer Gründlichkeit besondere Beachtung. Läßt man durch eine Wasserschicht von der Fläche  $F$ , deren Dicke variiert werden kann und einmal  $d'$ , ein andermal  $d''$  betragen möge, von oben nach unten die gleiche Wärmeenergie  $W$  im Dauerzustande strömen, so gilt

1) S. R. Milner und A. P. Chattock, Phil. Mag. (5) 48. S. 46. 1899.



$$(3) \quad W = \frac{F}{d'} (t_1' - t_2) \lambda$$

und

$$(4) \quad W = \frac{F}{d''} (t_1'' - t_2) \lambda,$$

wenn die untere Temperatur  $t_2$  der Wasserschicht in beiden Fällen gleich gehalten wird, die obere Temperatur  $t_1'$ , bzw.  $t_1''$  beträgt. Hieraus folgt

$$(5) \quad \frac{W}{F} (d' - d'') = \lambda (t_1' - t_1'').$$

Man könnte aus jeder der Gleichungen (3) und (4) für sich  $\lambda$  berechnen. Milner und Chattock aber haben ihr Versuchsverfahren auf Gleichung (5) gegründet. Sie verwendeten zwei ganz gleiche Apparate, bei denen die ganz flachen, gleichgebauten und vom gleichen Strom durchflossenen Platindrahtheizkörper durch eine Brückenschaltung gleichzeitig als Differenzthermometer zur Messung von  $(t_1' - t_1'')$  dienten. Jeder Heizkörper ruhte auf einer dünnen Glasscheibe, welche die obere Grenze der Flüssigkeitsschicht bildete, während die untere ein Metallboden war, der durch Kühlwasser auf der Temperatur  $t_2$  gehalten wurde. Die Dicke der Schicht wurde durch Bewegung der einen sie begrenzenden Fläche mittels einer Mikrometerschraube beliebig eingestellt. Durch diese Differenzmethode, bei der beide Apparate gleichzeitig in Betrieb waren, sollte erreicht werden, daß zeitliche Ungleichmäßigkeiten im elektrischen Strom und Kühlwasser und andere Korrekturen sich gegenseitig aufheben. Ferner konnte man, ohne Rücksichtnahme auf den Absolutwert von  $d'$  und  $d''$ , durch Regulieren an der Mikrometerschraube einen Ausgangszustand für die Messung einstellen, bei dem die Meßbrücke stromlos, also  $t_1' - t_1'' = 0$  war, und dann  $d' - d''$  an der Schraube ablesen. Das Verfahren ist durch viele Feinheiten und Korrekturen ausgezeichnet; so waren die Heizkörper in eine mittlere Heizfläche (von 4 cm Durchmesser) und „äußere Schutzringe“ (von 11,5 cm Durchmesser) zerlegt; die Wärmeabgabe von den Heizkörpern nach oben wurde durch besondere Heizkörper verhindert, die ebenfalls auf die Temperaturen  $t_1'$  und  $t_1''$  geheizt wurden usw. Aus 33 Einzelversuchen, deren Abweichungen voneinander sich in den Grenzen von  $\pm 1,5\%$  halten, er-

mittelten die Verfasser für  $20^{\circ}$  den Wert  $\lambda = 0,515_0$ . Mit zunehmender Temperatur scheint nach diesen Versuchen  $\lambda$  zuzunehmen.

12. Im Dauerzustand der Wärmeströmung hat auch R. Weber<sup>1)</sup> eine Bestimmung von  $\lambda$  ausgeführt, jedoch nicht annähernd mit der von den eben genannten Forschern erzielten Genauigkeit. Weber hat die Temperatur einer in einem Glaszylinder befindlichen, von oben nach unten von Wärme durchströmten Flüssigkeitsschicht mit zwei im vertikalen Abstand von 9—10 mm voneinander angeordneten Thermoelementen gemessen. Diesen Abstand hat er nur auf 2—3% genau bestimmen können, und er bezeichnet dies selbst als einen schwachen Punkt seines Verfahrens. Der Apparat war mit Wolle umhüllt; da ferner nur bei annähernd der Außentemperatur gleichen mittleren Temperaturen gemessen wurde, waren die Wärmeverluste gering. Sie wurden durch besondere Versuche bestimmt, wobei die Flüssigkeitsschicht durch Eiderdaunen ersetzt und der Glaszylinder einmal weggenommen, einmal beibehalten war. Bei der Verlustbestimmung hat der Verfasser aber offenbar irrtümlicher Weise der Oberfläche der Wollumhüllung die Außentemperatur zugeschrieben, während die 5—7 Watt betragende Verlustenergie einen Unterschied von der Größenordnung von  $10^{\circ}$  zwischen der Oberflächen- und Lufttemperatur zur Folge gehabt haben muß. Infolge dieses Irrtums ergibt sich übrigens aus den Versuchen, der Wert 0,086 für die Wärmeleitfähigkeit der Wolle, 0,00014 für die der Eiderdaunen. Dies hätte den Verfasser veranlassen müssen, seine Verlustbestimmung nachzuprüfen, da ein solcher Unterschied undenkbar ist und vielmehr beide Stoffe ein Wärmeleitvermögen von der Größenordnung 0,03 [kcal. m<sup>-1</sup>. Stde<sup>-1</sup>. Grad<sup>-1</sup>] haben werden. Infolge des erwähnten Versehens muß Webers Wert  $\lambda = 0,473_0$  für  $15,7^{\circ}$  um einige Prozente zu klein sein.

13. Endlich ist nun noch eine Abhandlung von Goldschmidt<sup>2)</sup> zu erwähnen, der die von Schleiermacher für Gase angegebene Methode modifiziert hat. In ein aus der Versuchsflüssigkeit bestehendes Bad bringt er nämlich einen

1) R. Weber, Ann. d. Phys. 11. S. 1047. 1903.

2) R. Goldschmidt, a. a. O.

Messingklotz, der in einer vertikalen Durchbohrung eine mit dem Bad kommunizierende Silberkapillare von 2 mm lichter Weite trägt. In deren Achse ist ein feiner Platindraht gespannt, der gleichzeitig als Heizkörper und Thermometer für die Flüssigkeit in der Kapillare dient. Beim Anheizen des Drahtes mit dem Strom  $i$  nehme sein Widerstand um  $\Delta x$  zu (proportional der Temperaturerhöhung).  $\Delta i^2 x / \Delta x$  gibt dann ein relatives Maß für die Wärmeleitung, wenn der Messingklotz seine Temperatur nicht ändert. Die Konvektion soll durch die Enge der Kapillare vermieden, die Einwirkung der Enden der Kapillare und des Drahtes durch die geschickte Gegenschaltung eines Drahtes in einer kurzen Kapillare ausgeschaltet sein. Leider gründet Goldschmidt seinen Absolutwert auf den von Lees angegebenen Wert für Alkohol, der seinerseits wieder, wie oben ausgeführt, auf den Messungen an Glas beruht. Der so berechnete Wert für Wasser von  $0^\circ$   $\lambda = 0,540_0$  ist daher jedenfalls nicht brauchbar. Auffallend ist, daß Goldschmidt für verschiedene Flüssigkeiten (ebenso wie Lees) Zunahme von  $\lambda$  mit abnehmender Temperatur (zwischen  $+15$  und  $-79^\circ$ ) findet. Da er jedoch den Temperaturkoeffizienten der Wärmeleitfähigkeit des *Wassers* nicht untersucht hat, braucht hier darauf nicht eingegangen zu werden.

Von sämtlichen in diesem Abschnitt erwähnten Messungen sind wohl die von Milner und Chattock am einwandfreiesten. Deren Methode läßt sich jedoch nicht ohne weiteres auf beliebige Temperaturen anwenden und erfordert eine teure und komplizierte Apparatur. Es wurde daher eine Methode ausgearbeitet, die mindestens ebenso genau, einfacher und für verschiedene Temperaturen brauchbar ist.

### C. Das neue Meßverfahren.

#### I. Grundlagen.

Bei dem in der Reichsanstalt neu ausgearbeiteten Verfahren wird in einem elektrischen Heizkörper im Dauerzustand stündlich die Wärmemenge  $W$  erzeugt; deren Hauptteil  $U = W - V$  durchströmt vertikal abwärts eine Wasserlamelle, die nach H. F. Webers Vorgang zwischen zwei horizontale Kupferplatten gebracht ist. Oberhalb der Temperatur  $4^\circ$  ist

dabei Wärmeübergang durch Konvektion im Wasser gänzlich ausgeschlossen. Aus der stündlichen Wärmemenge  $U = W - V$ , der Fläche  $F$  und der Dicke  $d$  der Flüssigkeitsschicht, sowie dem Temperaturabfall  $(t_1 - t_2)$  in dieser Schicht ergibt sich daher die Wärmeleitfähigkeit nach der Formel<sup>1)</sup>

$$(6) \quad \lambda = \frac{(W - V) d}{F(t_1 - t_2)}.$$

Die sämtlichen Größen auf der rechten Seite dieser Gleichung sind ganz einfach zu messen mit Ausnahme von  $V$ . Um die Wärmemenge  $V$ , die, ohne die Flüssigkeitsschicht zu durchsetzen, nach außen abströmt, gering zu machen, ist ein Vakuummantelgefäß über das Plattensystem gestülpt. Hierdurch wird der Wärmeverlust durch Konvektion und Strahlung und die Verdampfung des Wassers wesentlich verringert, wie weiter unten auseinandergesetzt wird. Es wird aber ferner hierdurch eine derartige Abgrenzung und Definition der gesamten Versuchsanordnung ermöglicht, daß es gelingt, die Einzelanteile, aus denen sich  $V$  zusammensetzt, durch Rechnung und besondere Versuche mit der erwünschten Genauigkeit zu ermitteln. In der Verwendung des Vakuummantelgefäßes und der Bestimmung der Wärmeverluste  $V$  ist der Fortschritt begründet, den der Verfasser mit dem jetzt näher zu beschreibenden Verfahren erzielt zu haben hofft.

## II. Die Versuchseinrichtung.

In Fig. 2 ist der Versuchsapparat dargestellt. Die Wärmemenge  $W$  wird erzeugt in dem Heizkörper  $H_1$ . Dieser besteht aus vier hintereinandergeschalteten Drahtspiralen in einem mit Öl gefüllten zylindrischen Kupfergefäß von 2 mm Wandstärke. Der 3 mm starke Messingboden des Gefäßes ist außen möglichst eben gearbeitet; ein Deckel von 2 mm Kupferblech ist in die Zylinderwandung gut eingepaßt. Die Wände des Heizgefäßes mußten deshalb aus Kupfer hergestellt und so dick gehalten werden, damit die Temperatur sich auf seiner Oberfläche möglichst ausgleichen konnte, obwohl das Öl nicht ge-

1) Dabei ist vorausgesetzt, daß das Wärmeströmungsfeld in der ganzen Schicht homogen und auch am Rande nicht verzerrt ist. Der Randverlust der Lamelle war bei unseren Versuchen so gering, daß diese Voraussetzung als erfüllt gelten durfte.

rührt wurde. Die Heizspiralen bestehen aus 0,7 mm starkem Konstantandraht; ihre Gesamtlänge beträgt etwa  $14\frac{1}{2}$  m, ihr

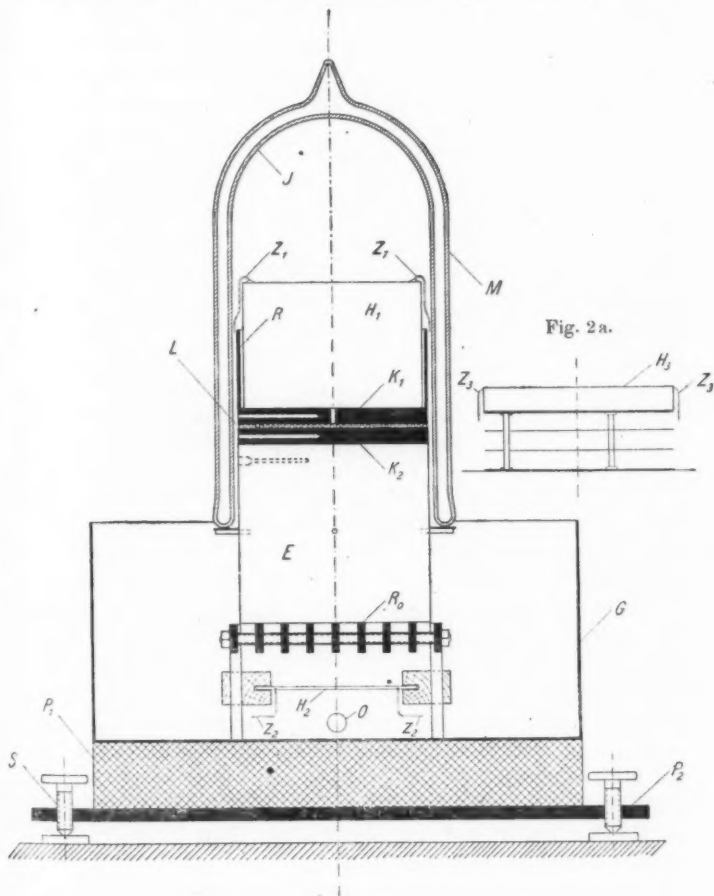


Fig. 2.

Widerstand etwa 20 Ohm. Die Zuleitungsdrähte  $Z_1$  (abgebrochen gezeichnet) sind durch Isolierbuchsen aus dem Deckel des Heizkörpers herausgeführt. Auf dem Deckel war

bei einigen Versuchen ein Thermoelement angelötet, dessen Drähte in üblicher Weise ein Stück weit auf der Deckelfläche geführt waren.

Je größer die Fläche der Wasserlamelle ist, desto größer wird die Wärmemenge  $U$  im Verhältnis zu der Verlustwärme  $V$ , desto größer also die Meßgenauigkeit. Dem äußeren Durchmesser der Kupferplatten  $K_1$  und  $K_2$  war aber eine Höchstgrenze gesetzt durch die lichte Weite des größten guten Vakuummantelgefäßes, das zur Verfügung stand. Der Durchmesser der Platten wurde hiernach zu 117 mm (genau: 116,85 mm) gewählt; ihre Dicke betrug je 10 mm. Die obere Platte hat eine zentrale Bohrung von 2 mm Durchmesser zum Einfüllen der Flüssigkeit, jede Platte ferner eine seitliche 2,5 mm weite, fast bis zur Mitte reichende Bohrung zur Aufnahme der Thermoelemente, die zur Messung des Temperaturabfalles ( $t_1 - t_2$ ) dienten. Die bei der Versuchsanordnung einander zugekehrten Flächen der Platten wurden in der Hauptwerkstatt der Reichsanstalt sorgfältig plan geschliffen.

Durch drei kleine rechtwinklige Glasplättchen von je  $3 \times 3$  qmm Grundfläche, die sämtlich bei  $14^\circ$  (auf 0,001 mm genau) 2,248 mm hoch waren, wurden die Kupferplatten voneinander getrennt und die Dicke  $d$  der Wasserlamelle  $L$  festgelegt.

Auf der oberen Kupferplatte  $K_1$  sitzt ein 49 mm hoher,  $2\frac{1}{2}$  mm dicker Messingring  $R$  von genau dem gleichen Außendurchmesser wie die Kupferplatten. Er dient als Strahlungsschutz gegen  $H_1$  und zur Herstellung eines ringförmigen Raumes von überall gleicher Weite zwischen dem Plattensystem und dem Vakuummantelgefäß (vgl. hierüber S. 560). An seiner Außenfläche sind je 5 mm vom oberen und unteren Rand entfernt zwei Thermoelemente angelötet, deren Drähte in gleicher Höhe etwa um den halben Umfang des Ringes herum- und dann nach außen geführt sind.

Die untere Kupferplatte  $K_2$  sitzt auf einem verkupferten, zylindrischen Eisenklotz  $E$  von genau gleichem Durchmesser, der 10 mm von seinem oberen Rand eine Bohrung für ein Thermoelement enthält und etwa 55 mm vom oberen Rand vier Stifte trägt, auf welchen das Vakuummantelgefäß  $M$  aufliegt.

Letzteres, aus Glas und von der üblichen Bauart mit versilberten Wänden (die innere Wand ist noch besonders mit *J* bezeichnet), war so gleichmäßig zylindrisch, wie man von einem Glasgefäß dieser Größe erwarten kann; die lichte Weite in verschiedenen Tiefen schwankte nämlich um höchstens 2 Proz. ihres Wertes; in einer Tiefe von 50 mm (vom Rand gemessen) war sie im Mittel 122,5 mm. Aus dem Gewicht und den Dimensionen des Gefäßes und der Dichte der Glassorte ergab sich die Wandstärke zu etwa 2,1 mm. Die Dicke der Versilberungsschicht betrug etwa 0,00015 mm.

Der Eisenzylinder *E* ruhte auf einem eisernen Rost *R*<sub>0</sub>, der auf dem Boden des Gefäßes *G* stand, und gab die von *K*<sub>2</sub> herabströmende Wärme an den Inhalt von *G* ab. Dieser Inhalt bestand bei den Versuchen bis 13° aus schmelzendem Eis. Ein mit Eis gefüllter Blechtrichter mit innerer zylindrischer Wand, welche die Außenwand von *M* umschloß, war dabei auf das Gefäß *G* aufgesetzt. Das Schmelzwasser floß durch ein nahe dem oberen Rand von *G* angebrachtes (hinter *E* befindliches und daher in Fig. 2 nicht sichtbares) Ablaufrohr ab. — Bei den Versuchen zwischen 20 und 40° durchfloß Kühlwasser<sup>1)</sup>, welches bei der Öffnung *O* eintrat, das Gefäß *G*. — Bei noch höheren Temperaturen war das Gefäß mit Öl gefüllt. Dieses wurde von dem flachen durch Asbestgewebe isolierten Heizkörper *H*<sub>2</sub> (Bauart Schniewindt) elektrisch geheizt. *H*<sub>2</sub> ist mittels zweier Holzklötze zwischen den Füßen des Rostes *R*<sub>0</sub> eingeklemmt; die Stromzuführungen *Z*<sub>2</sub> sind abgebrochen gezeichnet. Die Temperatur der in *G* befindlichen Flüssigkeit wurde mit einem in einem Glasröhrchen eingeführten Thermoelement immer an der gleichen Stelle gemessen.

Das Gefäß *G* steht auf einer isolierenden Korkplatte *P*<sub>1</sub>, diese wiederum auf einer Richtplatte *P*<sub>2</sub>. Mittels der Schrauben *S* konnten die Platten *K*<sub>1</sub> und *K*<sub>2</sub> genau horizontal eingestellt werden.

Die Versuche wurden im allgemeinen in der Anordnung

---

1) Bei einem dieser Versuche (Nr. 7 der Tabelle 2, S. 569) war dabei die Anordnung nach der in der Zeitschr. f. Instrumentenkunde (39. S. 184. 1919) angegebenen Fig. 11 getroffen. Der dort eingezeichnete Eisenzylinder *E'* erschwerte wegen seiner großen Wärmekapazität die Messung.

der Fig. 2 ausgeführt. Nur zur Messung der Strahlungsverluste (vgl. Abschnitt III, 6) wurde der Eisenklotz  $E$  entfernt und dafür die in Fig. 2a dargestellte Anordnung so in das Gefäß  $M$  geschoben, daß die Platte  $K_2$  in gleicher Höhe blieb wie in Fig. 2 und auf  $H_3$  aufsaß.

$H_3$  ist ein kleiner Heizkörper, bestehend aus einer Konstantandrahspirale, die in einem Messinggefäß in Öl liegt. Die Stromzuführungen  $Z_3$  sind wieder abgebrochen gezeichnet. Das Messinggefäß (vom gleichen Durchmesser wie  $K_2$ ) ruht auf einer Weißblechscheibe, die von drei Holzstäbchen getragen wird, welche selbst wiederum auf einer Weißblechscheibe stehen. Auf letzterer liegt bei den Strahlungsmessungen das Gefäß  $M$  auf. Zwischen den erwähnten Scheiben sind zwei weitere horizontale Weißblechscheiben als Strahlungsschützer angeordnet.

Als elektrische Stromquellen dienten Akkumulatorenbatterien, zur Messung der Heizenergie  $W$  Präzisionsampere-meter und -voltmeter von Siemens & Halske, die wiederholt nachgeprüft wurden.

Die Temperaturen wurden mit Thermoelementen bestimmt, die je aus einem 130 cm langen und 0,2 mm dicken Eisendraht und zwei je 65 cm langen und 0,25 mm dicken Konstantandrähten bestanden, an deren freie Enden je 120 cm lange und 0,5 mm dicke Kupferdrähte angelötet waren (Nebenlötstellen). Ihr Widerstand bei Zimmertemperatur betrug je 17,9 Ohm. Bei den Messungen befanden sich die eine Lötstelle und die beiden Nebenlötstellen durch Glasröhrchen geschützt in schmelzendem Eis. Als Meßinstrument diente ein Millivoltmeter von Siemens & Halske für Spannungen bis 18 mV. Der Widerstand des Instrumentes betrug 81,8 Ohm bei 19°; ein Skalenteil Ausschlag bedeutete 0,1 mV, entsprechend etwa 0,43° bei unmittelbarem Anschluß an die Thermoelemente.

### III. Die Wärmebilanz und die Bestimmung ihrer einzelnen Posten.

Von der im Heizkörper  $H_1$  im Dauerzustand stündlich erzeugten Wärmemenge  $W$  strömt, wie erwähnt, der größte Teil  $U$  durch die Wasserlamelle<sup>1)</sup>, ein Teil  $V$  aber auf anderen

1) In  $U$  ist ein vernachlässigbar kleiner Betrag für die Strahlung durch die Wasserschicht enthalten.



Wegen ab. Ich zerlege  $V$  in fünf einzelne Anteile  $V_1$ ,  $V_2$ ,  $V_3$ ,  $V_4$  und  $V_5$  und erhalte so die Wärmebilanz

$$W = U + V_1 + V_2 + V_3 + V_4 + V_5$$

oder mit Benutzung von Gleichung (6)

$$(7) \quad W = \frac{F(t_1 - t_2)}{d} \lambda + V_1 + V_2 + V_3 + V_4 + V_5.$$

Dabei bedeutet

- $V_1$  die Summe der kleinen Wärmemengen, welche vertikal nach unten abströmen durch die drei Glasplättchen zwischen  $K_1$  und  $K_2$ , durch die Luft in dem ringförmigen Raum zwischen der Wasserlamelle  $L$  und der inneren Glaswand  $J$  des Vakuummantelgefäßes, durch die Zuleitungsdrähte  $Z_1$  des Heizkörpers  $H_1$  und durch die Drähte der oberhalb von  $L$  angeordneten Thermoelemente,
- $V_2$  die zur Verdampfung von Wasser aus dem Rand der Lamelle  $L$  aufgewandte Energie,
- $V_3$  die in der Höhe von  $L$  durch die Innenwand  $J$  des Vakuummantelgefäßes vertikal nach abwärts strömende Wärmemenge,
- $V_4$  die durch Strahlung (und Leitung) quer zu den Wänden des Gefäßes  $M$  oberhalb von  $L$  nach außen abgeführte Wärme,
- $V_5$  endlich die Summe der Wärmemengen, welche von  $H_1$ ,  $K_1$ ,  $L$ ,  $K_2$ ,  $R$  und dem oberhalb  $L$  liegenden Teil der Wand  $J$  aufgenommen worden sind, wenn diese am Ende eines Versuches eine etwas höhere Temperatur haben als am Anfang. Sind die Endtemperaturen niedriger, so ist  $V_5$  negativ (Wärmeabgabe).

Wie nun die Posten der Wärmebilanz Gl. (7) im einzelnen bestimmt wurden, das soll in den folgenden Abschnitten dargestellt werden.

#### 1. Die gesamte Heizwärme $W$ .

$W$  wurde in üblicher Weise aus Strom und Spannung erhalten. Die Energie, welche in den Zuleitungen  $Z_1$ , soweit diese unterhalb der Lamelle  $L$  verlaufen, erzeugt wird, wurde dabei entsprechend der Länge dieser Drahtstücke (2,77 Proz. der Gesamtdrahtlänge) in Abzug gebracht.  $W$  wurde bei fast allen Versuchen annähernd zu 15,9 kcal/h gewählt, nur bei zwei Versuchen zu 10,2.

2. Der Betrag  $\frac{F(t_1 - t_2)}{d}$ .

Die Beziehung

$$U = \frac{F(t_1 - t_2)}{d} \lambda$$

gilt natürlich nur unter der Voraussetzung, daß die Wasserlamelle die Kupferplatten unmittelbar berührt, daß also nicht etwa dünne Luftschichten den Wärmeübergang verschlechtern.

Es erwies sich als nötig, das Wasser auszukochen und noch etwas warm ganz langsam zwischen die Platten einzufüllen; sonst perlte Luft aus dem Wasser aus und setzte sich an den Platten fest, während bei richtigem Vorgehen vor und nach dem Versuch die Platten bei horizontaler Durchleuchtung der Wasserlamelle blank spiegelnd erschienen.

In dem Ausdruck für  $U$  ist  $d = 0,002248$  m zu setzen (vgl. S. 550); die Veränderlichkeit von  $d$  in den Temperaturgrenzen der Versuche ist zu vernachlässigen.

Die Fläche der Wasserlamelle ist  $F = F_K - F_G - F_L$ , wobei  $F_K$  die Fläche einer Kupferplatte bedeutet,  $F_G = 0,000027$  qm die Summe der Querschnitte der 3 Glasplättchen zwischen den Platten und  $F_L$  der Querschnitt des schmalen Luftringes zwischen dem Rand der Kupferplatten und dem Meniskus der Wasserlamelle.  $F_L$  wurde folgendermaßen bestimmt: Zu Beginn und am Ende eines jeden Versuches wurde der Meniskus mittels einer Mikrometerschraube mit nadelfeiner Spitze an verschiedenen Stellen des Umfanges ausgemessen. Bei den Versuchen mit größerer Verdampfung wurde ferner unmittelbar nach dem Versuch soviel Wasser nachgefüllt, bis der Meniskus wieder genau gleich viel ausgebaucht oder eingebaucht war wie zu Beginn des Versuches. Aus der nachzufüllenden Wassermenge und  $d$  ließ sich berechnen, wie groß  $F_L$  in dem für die Berechnung von  $\lambda$  zugrundegelegten Zeitraum (vgl. Abschnitt 7, S. 567) im Mittel war. Dabei mußte natürlich jeweils die Änderung von  $F_L$  mit der Temperatur des Wassers berücksichtigt werden. Bei unseren Versuchen betrug  $F$  zwischen 0,0097 und 0,0106, im Mittel 0,0102 qm.

Der Temperaturabfall  $(t_1 - t_2)$  in der Wasserschicht ergibt sich aus der Differenz der Angaben der in die Kupferplatten  $K_1$  und  $K_2$  eingeführten Thermolemente. Von dieser Differenz

ist noch der Temperaturabfall in den Kupferplatten abzuziehen. Er beträgt etwa 1 Proz. von  $(t_1 - t_2)$  und ist aus der Wärmeleitfähigkeit des Kupfers, der Fläche  $F$  und der annähernd bekannten Wärmemenge  $U$  aufs einfachste zu berechnen.

Da bei den Versuchen  $(t_1 - t_2)$  etwa  $5,6-6,8^\circ$  (bei zwei Versuchen  $4,4^\circ$ ) betrug, war eine sehr sorgfältige Prüfung der Thermoelemente erforderlich, damit die Temperaturdifferenz auf mindestens  $\frac{1}{2}$  Proz. genau gemessen werden konnte. Sämtliche Elemente wurden zunächst am Kompensator und mit dem Zeigergalvanometer geeicht.<sup>1)</sup> Die Mittelwerte der 4 Versuchspunkte bei  $20, 40, 60$  und  $80^\circ$  habe ich durch die Gleichung

$$(8) \quad \frac{t}{A} = 0,439 - 0,000077 A$$

mit einer Genauigkeit von  $\frac{1}{2}$  pro Mille dargestellt, wobei  $A$  den bei der Temperatur  $t$  am Instrument abgelesenen Wert bedeutet.

Da die einzelnen Thermoelemente etwas voneinander abwichen, das Material der Drähte also offenbar nicht ganz homogen war, wurde außerdem die zwischen den beiden zur Messung von  $(t_1 - t_2)$  dienenden Thermoelementen bei gleicher Temperatur vorhandene Differenz besonders bestimmt, indem die bezüglichen Lötstellen beider Elemente zusammen in das Loch der oberen Kupferplatte des Versuchsapparates gesteckt und die Angaben  $A$  an 7 Punkten zwischen  $0$  und  $83^\circ$  verglichen wurden. Es ergab sich, daß die zwei Elemente fast völlig unabhängig von der Temperatur sich um  $0,06$  bis  $0,04^\circ$  im Mittel um  $0,05^\circ$  unterschieden. Die betreffende Korrektur wurde an den Ablesungen angebracht.

### 3. Die Summe $V_1$ verschiedener kleiner Wärmeverluste.

Die nach der auf S. 553 gegebenen Definition unter der Bezeichnung  $V_1$  zusammengefaßten Wärmeverluste lassen sich aus den bekannten Werten des Wärmeleitvermögens für Glas, Luft, Konstanten und Eisen und aus dem vertikalen Temperaturgefälle in der Höhe der Lamelle  $L$  (in Fig. 2) mit ge-

1) Für die Ausführung dieser Messungen bin ich Herrn Geheimrat Scheel zu besonderem Dank verbunden.

## 2. Der Betrag $\frac{F(t_1 - t_2)}{d}$ .

Die Beziehung

$$U = \frac{F(t_1 - t_2)}{d} \lambda$$

gilt natürlich nur unter der Voraussetzung, daß die Wasserlamelle die Kupferplatten unmittelbar berührt, daß also nicht etwa dünne Luftschichten den Wärmeübergang verschlechtern.

Es erwies sich als nötig, das Wasser auszukochen und noch etwas warm ganz langsam zwischen die Platten einzufüllen; sonst perlte Luft aus dem Wasser aus und setzte sich an den Platten fest, während bei richtigem Vorgehen vor und nach dem Versuch die Platten bei horizontaler Durchleuchtung der Wasserlamelle blank spiegelnd erschienen.

In dem Ausdruck für  $U$  ist  $d = 0,002248$  m zu setzen (vgl. S. 550); die Veränderlichkeit von  $d$  in den Temperaturgrenzen der Versuche ist zu vernachlässigen.

Die Fläche der Wasserlamelle ist  $F = F_K - F_G - F_L$ , wobei  $F_K$  die Fläche einer Kupferplatte bedeutet,  $F_G = 0,000027$  qm die Summe der Querschnitte der 3 Glasplättchen zwischen den Platten und  $F_L$  der Querschnitt des schmalen Luftringes zwischen dem Rand der Kupferplatten und dem Meniskus der Wasserlamelle.  $F_L$  wurde folgendermaßen bestimmt: Zu Beginn und am Ende eines jeden Versuches wurde der Meniskus mittels einer Mikrometerschraube mit nadelfeiner Spitze an verschiedenen Stellen des Umfanges ausgemessen. Bei den Versuchen mit größerer Verdampfung wurde ferner unmittelbar nach dem Versuch soviel Wasser nachgefüllt, bis der Meniskus wieder genau gleich viel ausgebaucht oder eingebaucht war wie zu Beginn des Versuches. Aus der nachzufüllenden Wassermenge und  $d$  ließ sich berechnen, wie groß  $F_L$  in dem für die Berechnung von  $\lambda$  zugrundegelegten Zeitraum (vgl. Abschnitt 7, S. 567) im Mittel war. Dabei mußte natürlich jeweils die Änderung von  $F_L$  mit der Temperatur des Wassers berücksichtigt werden. Bei unseren Versuchen betrug  $F$  zwischen 0,0097 und 0,0106, im Mittel 0,0102 qm.

Der Temperaturabfall  $(t_1 - t_2)$  in der Wasserschicht ergibt sich aus der Differenz der Angaben der in die Kupferplatten  $K_1$  und  $K_2$  eingeführten Thermolemente. Von dieser Differenz

ist noch der Temperaturabfall in den Kupferplatten abzuziehen. Er beträgt etwa 1 Proz. von  $(t_1 - t_2)$  und ist aus der Wärmeleitfähigkeit des Kupfers, der Fläche  $F$  und der annähernd bekannten Wärmemenge  $U$  aufs einfachste zu berechnen.

Da bei den Versuchen  $(t_1 - t_2)$  etwa  $5,6 - 6,8^\circ$  (bei zwei Versuchen  $4,4^\circ$ ) betrug, war eine sehr sorgfältige Prüfung der Thermoelemente erforderlich, damit die Temperaturdifferenz auf mindestens  $\frac{1}{2}$  Proz. genau gemessen werden konnte. Sämtliche Elemente wurden zunächst am Kompensator und mit dem Zeigergalvanometer geeicht.<sup>1)</sup> Die Mittelwerte der 4 Versuchspunkte bei  $20, 40, 60$  und  $80^\circ$  habe ich durch die Gleichung

$$(8) \quad \frac{t}{A} = 0,439 - 0,000077 A$$

mit einer Genauigkeit von  $\frac{1}{2}$  pro Mille dargestellt, wobei  $A$  den bei der Temperatur  $t$  am Instrument abgelesenen Wert bedeutet.

Da die einzelnen Thermoelemente etwas voneinander abwichen, das Material der Drähte also offenbar nicht ganz homogen war, wurde außerdem die zwischen den beiden zur Messung von  $(t_1 - t_2)$  dienenden Thermoelementen bei gleicher Temperatur vorhandene Differenz besonders bestimmt, indem die bezüglichen Lötstellen *beider* Elemente zusammen in das Loch der oberen Kupferplatte des Versuchsapparates gesteckt und die Angaben  $A$  an 7 Punkten zwischen  $0$  und  $83^\circ$  verglichen wurden. Es ergab sich, daß die zwei Elemente fast völlig unabhängig von der Temperatur sich um  $0,06$  bis  $0,04^\circ$  im Mittel um  $0,05^\circ$  unterschieden. Die betreffende Korrektur wurde an den Ablesungen angebracht.

### 3. Die Summe $V_1$ verschiedener kleiner Wärmeverluste.

Die nach der auf S. 553 gegebenen Definition unter der Bezeichnung  $V_1$  zusammengefaßten Wärmeverluste lassen sich aus den bekannten Werten des Wärmeleitvermögens für Glas, Luft, Konstanten und Eisen und aus dem vertikalen Temperaturgefälle in der Höhe der Lamelle  $L$  (in Fig. 2) mit ge-

1) Für die Ausführung dieser Messungen bin ich Herrn Geheimrat Scheel zu besonderem Dank verbunden.

nügender Genauigkeit berechnen. Diese Verlustwerte betragen im einzelnen höchstens einige Promille, zusammen nur 0,8 und 1,0 Proz. der Gesamtheizwärme  $W$ .

#### 4. Die Verdampfungswärme $V_2$ .

Heizt man den Apparat, ohne daß das Vakuummantelgefäß  $M$  übergestülpt ist, so findet infolge der kräftigen Konvektion am Rand der Flüssigkeitslamelle eine ziemlich schnelle Verdampfung statt. Es wäre dabei unmöglich, die Versuche, besonders die bei höheren Temperaturen, durchzuführen, da es nicht gelingen könnte, schnell genug einen Dauerzustand einzuregulieren. Durch den Mantel  $M$  wird die Verdampfung äußerst verringert. Die Luft zwischen den inneren Metallkörpern und dem Mantelgefäß ist schnell mit Wasserdampf gesättigt, und dann verdampft nur noch soviel, wie durch den schmalen Ring zwischen diesen Körpern und dem Mantel nach unten (also ohne Konvektion) diffundieren kann. Da die Luft unterhalb der Lamelle  $L$  um mehrere Grad kälter ist als die oberhalb von  $L$ , so fällt der diffundierende Wasserdampf unten aus und schlägt sich an den Metallflächen unterhalb  $L$  nieder. Würde die ganze dabei freiwerdende Kondensationswärme unmittelbar unterhalb  $L$  der Kupferplatte  $K_2$  zugeführt und sich sofort über deren ganze Fläche  $F_K$  verteilen, so würde selbst bei der größten beobachteten Verdampfung der Temperaturabfall in  $K_2$  bis zu der Stelle der Thermoelementbohrung noch nicht um  $\frac{1}{1000}^\circ$  vergrößert. Selbst in diesem ungünstigsten Fall würde also das Resultat durch die Kondensationswärme nicht beeinflusst. Dagegen geht die Verdampfungswärme  $V_2$ , weil von  $H_1$  geliefert und in der Gesamtwärme  $W$  inbegriffen, mit dem vollen Betrag in das Meßergebnis ein. Sie ist aus der bekannten Verdampfungswärme des Wassers und der Verdampfungs menge ohne weiteres zu berechnen. Wie die letztere bei jedem Versuch festgestellt wurde, ist bereits auf S. 554 auseinandergesetzt. Sie nahm mit zunehmender Temperatur bis auf etwa 0,55 g/h bei  $72\frac{1}{2}^\circ$  zu, in welchem Fall  $V_2$  etwa 2 Proz. der gesamten zugeführten Wärme ausmacht, gegenüber  $\frac{1}{2}$  Proz. bei  $8^\circ$ .

5. Die Wärmeableitung  $V_3$  längs der inneren Glaswand.

In der inneren Glaswand  $J$  des Vakuummantelgefäßes  $M$  wird die Temperatur von oben nach unten geringer. Es strömt daher in dieser Wand Wärme axial ab. In der Fig. 3 sind die Wand  $J$  und die ihr benachbarten Teile des Apparates ober- und unterhalb der Wasserlamelle  $L$  im Schnitt

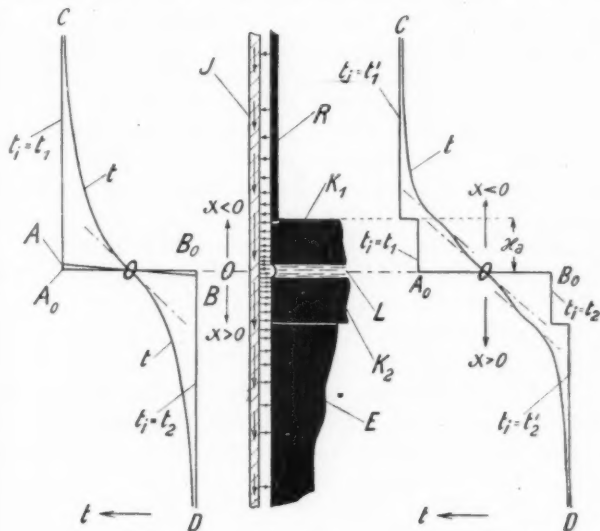


Fig. 3a.

Fig. 3.

Fig. 3b.

besonders dargestellt. Bei den folgenden Rechnungen wird zunächst von der Strahlung von Wärme durch den Ringraum zwischen  $R$ ,  $K_1$ ,  $L$ ,  $K_2$ ,  $E$  und der Wand  $J$  abgesehen, was man bei den niederen Temperaturen ohne weiteres darf.<sup>1)</sup> Dann findet im Dauerzustand eine Wärmeleitung durch den Luftring und die Glaswand etwa im Sinn der in Fig. 3 eingezeichneten Pfeile statt.<sup>2)</sup> Der Temperaturverlauf ist in den

1) Spätere Betrachtungen (vgl. S. 563, Fußnote 1) und Messungen (vgl. Abschnitt 8) zeigen, daß die Rechnungen auch bei den höheren Temperaturen genau genug sind.

2) Die axiale Wärmeableitung im Luftring ist dabei vernachlässigt. Sie ist gering und in  $V_1$  so eingerechnet, als ob sie ohne Rückwirkung auf  $V_3$  wäre.

daneben gezeichneten Diagrammen dargestellt, von welchen wir zunächst Fig. 3a betrachten wollen. In dieser Figur sind mit  $x$  bezeichnet die vertikalen Abstände der horizontal gegenüberliegenden Punkte der Fig. 3 von einer durch die Mitte der Wasserlamelle zu legenden Nulllinie, oberhalb welcher  $x < 0$ , unterhalb welcher  $x > 0$  sei. Die Temperaturen sind in horizontaler Richtung eingetragen.  $t_i$  bedeute die Temperatur der Metallkörper und zwar sei  $t_i = t_1$  für  $R$  und  $K_1$ ,  $t_i = t_2$  für  $K_2$  und  $E$ . Die Temperatur der Glaswand sei mit  $t$  bezeichnet. Der Temperaturverlauf in dem Metallkörper (und im Wasser) ist dann durch den Linienzug  $CABD$  dargestellt, den man genügend genau durch  $CA_0B_0D$  ersetzen kann, der Temperaturverlauf in der Glaswand durch eine Kurve  $COD$ . Von dieser Kurve brauchen wir die Tangente  $(dt/dx)_0$  an der Stelle  $x = 0$ . Aus ihr, dem genügend genau bekannten Wärmeleitungsvermögen  $\lambda_G$  der Glassorte, sowie dem Querschnitt  $f_G$  der Glaswand (vgl. S. 551) erhält man den gesuchten Wert  $V_3$  nach der Formel<sup>1)</sup>

$$(9) \quad V_3 = -\lambda_G \cdot f_G \cdot \left( \frac{dt}{dx} \right)_0.$$

Es ist nun also der Verlauf der Kurve  $COD$  zu bestimmen: In ein elementares Stück der Glaswand  $J$  von der Länge  $dx$  tritt im Dauerzustand stündlich *ein* die Wärmemenge

$$\lambda_L \cdot \frac{f_L}{s_L^2} \cdot dx (t_i - t) - f_G \cdot \lambda_G \frac{dt}{dx}.$$

Aus dem gleichen Element tritt stündlich *aus* die Wärmemenge

$$-f_G \lambda_G \left( \frac{dt}{dx} + \frac{d^2 t}{dx^2} dx \right).$$

Hierin bedeutet  $f_L$  den Querschnitt,  $s_L$  die Weite des Luft ringes,  $\lambda_L$  die Wärmeleitfähigkeit der Luft. Da die beiden Wärmemengen gleich sein müssen, erhalten wir als Differentialgleichung des Temperaturverlaufes längs der Glaswand

<sup>1)</sup> Es ist hierbei angenommen, daß die Temperatur im Glasquerschnitt überall gleich wäre, was genügend genau zutrifft. Die Wärmeableitung durch den nur  $0,15 \mu$  starken Silberbelag (vgl. S. 551) ist vernachlässigbar.



$$(10) \quad \frac{d^2 t}{dx^2} = c t + b = c(t - t_i)$$

mit

$$(10a) \quad c = -\frac{f_L \cdot \lambda_L}{L^2 \cdot f_G \cdot \lambda_G} \quad \text{und} \quad b = -c t_i$$

Die allgemeine Lösung der Differentialgleichung (10)

$$x = \int \frac{dt}{\sqrt{a + 2f(ct + b)dt}} + C$$

mit den Konstanten  $a$  und  $C$  ergibt, da  $c > 0$ , durch Integration

$$(11) \quad x = \frac{1}{\pm \sqrt{c}} \ln \pm [b + ct \pm \sqrt{c} \sqrt{a + 2bt + ct^2}] + C.$$

Hieraus folgt durch Differentiation

$$(12) \quad \frac{dt}{dx} = \pm \sqrt{a + 2bt + ct^2} = \pm \sqrt{a + ct(t - 2t_i)}.$$

Das Vorzeichen  $+$  scheidet aus, wie leicht einzusehen ist.Es sind nun die Konstanten  $a$  und  $C$  zu bestimmen.Für  $x < 0$  (Ast I der Kurve) seien sie mit  $a_I$  und  $C_I$ , für  $x > 0$  (Ast II der Kurve) seien sie mit  $a_{II}$  und  $C_{II}$  bezeichnet.<sup>1)</sup>Für  $x = \pm \infty$  muß gelten  $t = t_i$  und  $dt/dx = 0$ .

Aus (12) folgt hiernach

$$(13) \quad \left\{ \begin{array}{l} a_I = c t_i^2 \\ \text{und} \\ a_{II} = c t_i^2 \end{array} \right.$$

Für  $x = 0$  muß gelten

$$t_I = t_{II} = t_0 \quad \text{und} \quad (dt/dx)_I = (dt/dx)_{II} = (dt/dx)_0.$$

Aus (12) folgt somit

$$(14) \quad t_0 = \frac{t_1 + t_2}{2},$$

was man auch aus Symmetriegründen vermuten konnte. (Vgl. die zu- und abnehmende Größe der Pfeile in der Glaswand  $J$  in Fig. 3.)

Aus (11) und (13) erhält man nun

$$(15) \quad x = \frac{1}{\pm \sqrt{c}} \ln \pm 2c(t - t_i) + C,$$

<sup>1)</sup> Analog bedeutet  $t_i$  die Temperatur  $t$  für den Ast I usw.

aus (14) und (15)

$$(16) \quad \left\{ \begin{array}{l} C_1 = \frac{1}{\mp \sqrt{c}} \ln \pm c(t_2 - t_1) \\ \text{und} \\ C_{II} = \frac{1}{\mp \sqrt{c}} \ln \pm c(t_1 - t_2), \end{array} \right.$$

aus (15) und (16)

$$(17) \quad \left\{ \begin{array}{l} x_1 = \frac{1}{\sqrt{c}} \ln 2 \frac{t - t_1}{t_2 - t_1} \\ \text{und} \\ x_{II} = \frac{1}{-\sqrt{c}} \ln 2 \frac{t - t_2}{t_1 - t_2}. \end{array} \right.$$

(Da  $\frac{t - t_1}{t_2 - t_1} \leq \frac{1}{2}$  und  $\frac{t - t_2}{t_1 - t_2} \leq \frac{1}{2}$  sind nur die Vorzeichen der Gl. (17) mit der Fig. 3a in Übereinstimmung.) Durch Gl. (17) ist der Verlauf von  $t$  dargestellt durch je einen Ast zweier logarithmischer Kurven, die bei  $x = 0$  eine gemeinsame Tangente haben. Es folgt nun endlich aus Gl. (17) oder aus (12) und (13)

$$(18) \quad \left\{ \begin{array}{l} (dt/dx)_I = \sqrt{c}(t - t_1) \\ \text{und} \\ (dt/dx)_{II} = -\sqrt{c}(t - t_2) \end{array} \right.$$

und mit (14) der gesuchte Wert für  $x = 0$  in der einfachen Form

$$(19) \quad (dt/dx)_0 = \sqrt{c} \frac{t_2 - t_1}{2}.$$

Die obige Rechnung setzt voraus, daß der zylindrische Luft-ringraum zwischen den Metallkörpern und der Glaswand sich nach oben und unten in gleicher Weite  $s_L$  ins Unendliche erstreckt. Aus der maßstäblich gezeichneten Fig. 3a ist aber ersichtlich, daß schon eine Erstreckung von je 5 cm nach oben und unten praktisch genügt. Aus diesem Grund wurde der Meßsingring  $R$  etwa 5 cm hoch gewählt und der Eisenklotz  $E$  etwa 5 cm tief in das Vakuummantelgefäß eingelassen.

Bei unseren Rechnungen war ferner bisher vorausgesetzt, daß zwischen den Metallkörpern  $R$  und  $K_1$  und zwischen  $K_2$  und  $E$  ein vollkommener Temperatúrausgleich stattfindet. In

Wirklichkeit wurde zwischen  $R$  und  $K_1$  und zwischen  $K_2$  und  $E$  ein Temperatursprung festgestellt, der je nach dem mehr oder minder gelungenen Zusammenbau verschieden groß war und im allgemeinen weniger als  $1^\circ$ , in manchen Fällen aber auch über  $1^\circ$  betrug.<sup>1)</sup> Da nun die gesamte Temperaturdifferenz ( $t_1 - t_2$ ) im Durchschnitt weniger als  $6^\circ$  betrug, so war noch zu untersuchen, welchen Einfluß dieser Temperatursprung auf das Ergebnis haben konnte.

Der Temperaturverlauf ist in Fig. 3b dargestellt. Entsprechend den vier Temperaturstufen<sup>2)</sup>  $t_1'$ ,  $t_1$ ,  $t_2$  und  $t_2'$  (Temperaturverlauf  $CA_0OB_0D$  in den Metallkörpern) hat die Kurve  $COD$  des Temperaturverlaufes  $t$  in der Glaswand 4 Äste I', I, II und II', die je in einem Wendepunkt (verursacht durch den Temperatursprung von  $t_1$ ) ineinander übergehen.

Glücklicherweise ist auch die Berechnung dieser Kurve leicht möglich. Die Differentialgleichung (10), ihre Lösung (11) und somit auch Gl. (12) bleiben unverändert. Nehmen wir Symmetrie gegenüber der Stelle  $x = 0$  an, also  $t_1' - t_1 = t_2 - t_2'$  (was in Wirklichkeit nicht völlig, aber genügend genau stimmt), so können wir uns auf die Betrachtung der Kurvenäste I' und I beschränken. An deren Übergangsstelle  $x = x_a$  herrsche die Temperatur  $t = t_a$  in der Glaswand. Da für  $x = -\infty$  auch hier  $dt/dx = 0$  sein muß, folgt aus Gl. (12)

$$(20) \quad a'_1 = c t_1'^2.$$

Aus (11) und (20) erhält man weiter, wenn man  $C'_1$  durch Einsetzen von  $x_a$  und  $t_a$  eliminiert, nach einer Diskussion der Vorzeichen

$$(21) \quad x'_1 = x_a + \frac{1}{\sqrt{c}} \ln \frac{t - t_1'}{t_a - t_1'}$$

und hieraus die der Gl. (18) analoge Gleichung

$$(22) \quad (dt/dx)' = \sqrt{c} (t - t_1')$$

1) Der Deckel des Heizkörpers  $H_1$  (vgl. Fig. 2) war, wie besondere Messungen ergaben, um mehrere Grad wärmer als der Ring  $R$ . Der Strahlungsschutz, den dieser bietet, ist also durchaus nötig.

2) In  $R$  ist ein Temperaturgefälle von oben nach unten gemessen worden. Es geht also ein Teil der Wärmemenge  $W$  durch  $R$  auf  $K_1$  über. Für die vorliegenden Rechnungen kann die Temperatur von  $R$  überall gleich angenommen werden.

und für die Stelle  $x = x_a$

$$(23) \quad (dt/dx)_a = \sqrt{c} (t_a - t_1').$$

Da der Kurvenast I an der Stelle  $x = x_a$  die gleiche Tangente haben muß, so folgt nun aus (10a), (12) und (23)

$$(24) \quad a_1 = c[t_1'^2 - 2t_a(t_1' - t_1)]$$

und aus (12) und (24) für  $x = 0$  mit  $t = t_0 = \frac{t_1 + t_2}{2}$

$$(25) \quad \left(\frac{dt}{dx}\right)_0 = -\sqrt{c} \sqrt{(t_1' - t_a)^2 - (t_1 - t_a)^2 + (t_1 - t_0)^2}.$$

In dieser Gleichung ist nur  $t_a$  noch unbekannt. Nun gewinnt man, indem man aus der Gl. (11) durch Einsetzen von  $x_a$  und  $t_a$  die Konstante  $C_1$  eliminiert, die Formel

$$(26) \quad x = x_a + \frac{1}{\pm \sqrt{c}} \ln \frac{b_1 + ct \pm \sqrt{c} \sqrt{a_1 + 2b_1 t + ct^2}}{b_1 + ct_a \pm \sqrt{c} \sqrt{a_1 + 2b_1 t_a + ct_a^2}}$$

und hieraus mit der Benutzung von Gl. (10a) und (24) nach kurzer Umrechnung und Einsetzen des Wertes  $t = t_0$  für  $x = 0$ .

$$(27) \quad x_a = \frac{1}{-\sqrt{c}} \ln \frac{t_0 - t_1 - \sqrt{(t_1' - t_a)^2 - (t_1 - t_a)^2 + (t_1 - t_0)^2}}{(t_a - t_1) - (t_1' - t_a)}$$

Diese Gleichung muß für  $t_1 = t_1'$  nach Gl. (17) den Wert

$$x_a = \frac{1}{\sqrt{c}} \ln 2 \frac{t - t_1}{t_2 - t_1}$$

ergeben. Dies ist der Fall, da die Gl. (17) widersprechenden Vorzeichen der Gl. (26) ausgeschlossen wurden. Gl. (27) ist eine quadratische Gleichung, als deren Wurzel man  $t_a$  in elementarer Weise berechnen kann. Durch Einsetzen des gefundenen Wertes in Gl. (25) erhält man  $(dt/dx)_0$  und damit nach Gl. (9) den gesuchten Wert  $V_3$ .

Es soll nun an einem Beispiel dargelegt werden, wie das Ergebnis beeinflußt wird, je nachdem man  $(dt/dx)_0$  nach Gl. (19) oder Gl. (25) berechnet. Bei Versuch Nr. 4 der Tabelle 3 (S. 570) war<sup>1)</sup>  $t_1' = 17,3^\circ$ ,  $t_1 = 16,1$ ,  $t_2 = 9,3$ ,  $t_2' = 8,1$  und

1) Die Temperaturen sind auf Zehntel Grade abgerundet, und  $t_1'$  und  $t_2'$  sind um ein weiteres Zehntel sinngemäß so korrigiert, daß Symmetrie gegen  $x = 0$  besteht.

$c = 5310 \text{ [m}^{-2}\text{]}. \text{ Nach Gl. (19) erhielt man}$

$$(dt/dx)_0 = \sqrt{c} \frac{t_2 - t_1}{2} = -248$$

oder

$$(dt/dx)_0 = \sqrt{c} \frac{t_2' - t_1'}{2} = -335 \text{ und nach Gl. (17)}$$

$t_a = 14,6$  oder  $= 15,25$ , je nachdem man  $t_1$  und  $t_2$  oder  $t_1'$  und  $t_2'$  als maßgebend für die Berechnung ansehen wollte. Der wirkliche Wert  $(dt/dx)_0$  muß zwischen  $-248$  und  $-335$  liegen. Nehmen wir an, er liege genau in der Mitte, es sei also  $(dt/dx)_0 = -291,5$ , so könnte  $(dt/dx)_0$  in Wirklichkeit höchstens um 15 Proz. größer oder kleiner sein. Da nun  $V_3$  nur 0,8 bis 1 Proz. der Gesamtheizwärme  $W$  ausmacht, so kann der mögliche Fehler nur 2 Promille von  $W$  betragen. Da  $t_a$  zwischen 14,6 und 15,25 liegen muß, so läßt sich der richtige Wert leicht durch Probieren (statt durch Rechnen) aus Gl. (27) ermitteln. Man findet  $t_a = 15,07$  und  $(dt/dx)_0 = -286$ , macht also bei der Annahme des Mittelwertes  $-291,5$  sogar nur einen Fehler von 0,2 Promille (bezogen auf  $W$ ). Statt mit der exakten Gl. (27) ist daher bei allen Versuchen mit dem Mittelwert

$$(28) \quad (dt/dx)_0 = \sqrt{c} \frac{(t_2 - t_1) + (t_2' - t_1')}{4}$$

gerechnet worden. Indem man diesen Wert in Gl. (9) einsetzt, erhält man

$$(29) \quad V_3 = \sqrt{c} \frac{(t_1 - t_2) + (t_1' - t_2')}{4} \lambda_G f_G$$

und mit Benutzung von Gl. (10a)

$$(30) \quad V_3 = \frac{(t_1 - t_2) + (t_1' - t_2')}{4} \frac{1}{s_L} \sqrt{f_L \lambda_L f_G \lambda_G \cdot 1}$$

1) All diese Ableitungen gelten ganz streng nur, wenn nicht gleichzeitig Strahlung durch den ringförmigen Luftraum und den Vakuummantel stattfindet, also bei nicht allzu weit von der Außentemperatur abweichender Temperatur des Wassers. Bei höheren Temperaturen spielt die im folgenden Abschnitt behandelte Strahlung eine Rolle. Ihr Einfluß auf die axiale Temperaturverteilung in der Glaswand  $J$  ist im wesentlichen so, als ob die  $t$ -Kurve der Fig. 3a und 3b parallel zur  $t$ -Richtung nach rechts verschoben wäre, wobei  $V_3$  also unverändert

Nach dieser Gleichung ist der Wärmeverlust  $V_3$  bei den einzelnen Versuchen berechnet und, wie erwähnt, gleich 0,8 bis 1 Proz. der Gesamtheizwärme  $W$  gefunden worden.

#### 6. Der Strahlungsverlust $V_4$ .

Trotz der Verwendung eines guten Vakuummantelgefäßes  $M$  mit versilberten Wänden war der Wärmeverlust durch Strahlung quer zu den Wänden bei der höchsten Versuchstemperatur von  $72\frac{1}{2}^\circ$  größer als sämtliche anderen Verluste zusammen. Dieser Verlust konnte aber durch besondere Versuche genau bestimmt werden. Dabei befand sich zwischen den Kupferplatten  $K_1$  und  $K_2$  (Fig. 2) kein Wasser, sondern Luft, und es war der in Fig. 2a dargestellte Heizkörper  $H_3$  statt des Eisenklotzes  $E$  unter  $K_2$  geschoben, wie auf S. 552 beschrieben ist. Es wurde nun durch gleichzeitige Heizung mit  $H_1$  und  $H_3$  bei verschiedenen Temperaturen  $t_1$  ein Dauerzustand von der Art hergestellt, daß  $t_2$  höchstens um etwa  $0,1$  oder  $0,2^\circ$  niedriger war als  $t_1$ . Dann ging nur ein ganz geringer Anteil  $U$  der Wärmemenge  $W$  von oben nach unten durch die Luftschicht zwischen den Platten (während  $U$  bei den Hauptversuchen 90 bis 98 Proz. von  $W$  betrug) und ebenso war  $V_1$  und  $V_3$  ganz gering, weil auch in dem Luft-ring und in der Glaswand in der Höhe von  $L$  fast kein Temperaturabfall in der  $x$ -Richtung stattfand.  $V_2$  entfiel überhaupt, da kein Wasser verwendet wurde, und  $V_5$  ließ sich ebenfalls ganz klein halten, weil nicht aus Rücksicht auf die Verdampfung die Einregulierung der Temperaturen sehr schnell erfolgen mußte, sondern ein fast vollkommener Dauerzustand abgewartet werden konnte (vgl. hierüber S. 567). Fast die ganze in  $H_1$  erzeugte Wärmemenge  $W$  wurde also durch Strahlung nach außen abgegeben. Dies ist aus den Wärmebilanzen ersichtlich, die durch Versuche bei der Außentemperatur  $t_u = 14,5$  und drei verschiedenen Innentemperaturen  $t_i$  (an  $K_1$  und  $R$  gemessen)<sup>1)</sup> erhalten wurden (vgl. Tabelle 1). In  $U$  ist ein

bliebe. Zur Kontrolle der Richtigkeit der Einzelverlustmessungen ist übrigens bei der höchsten Versuchstemperatur auch eine Gesamtverlustmessung vorgenommen worden (vgl. Abschnitt 8).

1) Deren Temperaturen unterscheiden sich dabei nicht wesentlich.

Betrag von 0,001 kcal/h für die Strahlung durch die Luftschicht zwischen  $K_1$  und  $K_2$  enthalten.

Tabelle 1.

Wärmebilanz bei den Strahlungsmessungen.

$t_1$	$W - (U + V_1 + V_2 + V_3) = V_4$	$V_4$ nach Gl. (31)
34,3°	$0,235 - (0,019 + 0,002 + 0,003 + 0,000) = 0,211$	0,222
55,3°	$0,515 - (0,031 + 0,003 + 0,005 + 0,002) = 0,474$	0,499
76,2°	$0,896 - (0,033 + 0,003 + 0,005 + 0,000) = 0,855$	0,832

Die gemessenen Werte des Strahlungsverlustes lassen sich genügend genau ausdrücken durch die empirische Gleichung

$$(31) \quad V_4 = 0,0104 \left[ \left( \frac{T_I}{100} \right)^4 - \left( \frac{T_{II}}{100} \right)^4 \right]$$

(vgl. letzte Spalte der Tab. 1). Durch Einsetzen der jeweils gemessenen Innen- und Außentemperaturen  $T_I$  und  $T_{II}$  in diese Formel ergab sich hiernach bei unseren Hauptversuchen (vgl. Tab. 2, S. 569) ein mit der Temperatur von 0,2 bis 5,3 Proz. der Gesamtwärme  $W$  ansteigender Strahlungsverlust  $V_4$ .

Aus Gleichung (31) läßt sich nebenbei das Reflexionsvermögen der versilberten Wände des Vakuummantelgefäßes mit guter Annäherung berechnen. Da dies für die Trennung der Wärmeverluste solcher Gefäße von Wichtigkeit ist, soll die Berechnung hier mitgeteilt werden. Die Gleichung (31) hat dieselbe Form wie die von Christiansen<sup>1)</sup> zuerst angegebene Gleichung

$$(32) \quad V_4 = \frac{F_1 \cdot A_1 \cdot A_2 \cdot C}{A_2 + F_1/F_2 \cdot A_1 (1 - A_2)} \left[ \left( \frac{T_I}{100} \right)^4 - \left( \frac{T_{II}}{100} \right)^4 \right],$$

statt deren man noch allgemeiner

$$(33) \quad V_4 = \frac{F_1 \cdot A_1 \cdot A_2 \cdot C}{A_2 + F_1/F_2 \cdot A_1 (1 - A_2)} [\varphi(T_I) - \varphi(T_{II})]$$

schreiben kann. Dabei ist  $V_4$  die Strahlungsenergie, die von einem inneren überall konvexen Körper von der Oberfläche  $F_1$  und Temperatur  $T_I$  auf eine überall konkave Hülle von der Fläche  $F_2$  und der Temperatur  $T_{II}$  übergeht, wenn  $A_1$  und  $A_2$  das Absorptionsvermögen von Körper und Hülle bedeuten. Christiansen macht darauf aufmerksam, daß Formel (32) streng nur gilt,

1) C. Christiansen, Wied. Ann. 19. S. 267. 1883.

wenn eine der Flächen  $F_1$  und  $F_2$  unregelmäßig geformt oder diffus reflektierend sei. Bei konzentrischen, nicht diffus reflektierenden Kugeln falle in Gleichung (32) der Faktor  $F_1/F_2$  weg. (Das gleiche gilt für konzentrische unendlich lange Zylinder.) Gelten nun ferner für das Emissionsvermögen  $\epsilon$  des schwarzen Körpers,  $E_1$  der Fläche  $F_1$  und  $E_2$  der Fläche  $F_2$  gleichzeitig die Beziehungen

$$(34) \quad \begin{cases} \epsilon = C \cdot \varphi(T) \\ E_1 = C_1 \cdot \varphi(T) \\ E_2 = C_2 \cdot \varphi(T) \end{cases},$$

so folgt aus Gleichung (33)

$$(35) \quad V_4 = \frac{F_1}{1/C_1 + F_1/F_2(1/C_2 - 1/C)} [\varphi(T_I) - \varphi(T_{II})].$$

Hieraus<sup>1)</sup> und aus Gleichung (31) erhält man<sup>2)</sup> nun mit  $\frac{F_1}{1/C_1 + F_1/F_2(1/C_2 - 1/C)} = 0,0104$ ,  $F_1 = 0,0764 \text{ qm}$ ,  $F_2 = 0,0887 \text{ qm}$ , sowie  $C = 4,9$  die Werte  $C_1 = C_2 = 0,2476$  und  $A_1 = \frac{C_1}{C} = 0,0505 = A_2$ , bei Weglassung des Faktors  $F_1/F_2$  aber  $C_1 = C_2 = 0,265$  und  $A_1 = A_2 = 0,0541$ . Da unsere Flächen  $F_1$  und  $F_2$  sich je aus den Zylinderflächen oberhalb  $L$  (vgl. Fig. 2) und den angeblasenen Halbkugeln zusammensetzen, dürfte das Absorptionsvermögen der Silberbelege gleich dem Mittel aus beiden Werten, also  $A_1 = 0,052$  sein, das Reflexionsvermögen somit  $R_1 = 0,95$ . Dieser Wert kann, solange nicht weitere Messungen vorliegen, für die Trennung der Wärmeverluste von Vakuummantelgefäßen benutzt werden.

1) Der in  $V_4$  enthaltene Anteil für Wärmeleitung ist bei dem hohen Vakuum guter Vakuummantelgefäße gegenüber dem Strahlungsanteil zu vernachlässigen.

2) Für Metallflächen gilt zwar die Beziehung (34) nicht in aller Strenge; denn wie E. Aschkinass (Ann. d. Phys. 17. S. 960. 1905), gestützt auf die bekannten Messungen von Hagen und Rubens ausführt, verhält sich die Gesamtstrahlung einer Metallfläche zu der einer gleich großen schwarzen Fläche wie  $c\sqrt{T}$  (mit  $c = 0,00087$  für Silber). Die Tatsache aber, daß die empirische Beziehung (31) die gleiche Funktion  $\varphi$  enthält wie das Stefan-Boltzmannsche Gesetz, zeigt, daß soweit im Ultraroten, wie bei uns das Strahlungsmaximum liegt, Gl. (34) jedenfalls genau genug ist.



7. Die Wärmeaufspeicherung  $V_5$ .

Während die Wärmeverluste  $V_1$  bis  $V_4$  nur durch die Versuchsanordnung bedingt sind, hängt die Größe von  $V_5$  wesentlich von der Geschicklichkeit des Experimentators ab. Zwar nimmt bei konstant gehaltener Temperatur  $t_2$  infolge der Verdampfung von Wasser aus der Lamelle bei unveränderter Heizung  $W$  die Temperatur  $t_1$  kontinuierlich zu, aber diese Änderung würde selbst bei der größten gemessenen Verdampfung nur eine Korrektur<sup>1)</sup>  $V_5 = 0,07$ , d. i. etwa 0,4 Proz. von  $W$  ergeben. Ehe aber ein Zustand der Wärmeströmung erreicht wäre, bei dem nur  $t_1$  in der oben erwähnten Weise<sup>1)</sup> anstiege, wäre bereits soviel Wasser aus der Lamelle verdampft, daß andere Grundlagen des Versuchs gestört und seine Ausführung damit gescheitert wäre. Es handelte sich also darum, durch Regulieren von  $H_1$  und  $H_2$  möglichst schnell einen nur annäherungsweise vollkommenen Dauerzustand zu erreichen und die kleinen Temperaturänderungen der einzelnen Teile dann in Rechnung zu setzen. Es gelang schließlich, die gesamte Versuchsdauer vom Einfüllen des Wassers bis zum Nachmessen der verdampften Wassermenge nach Abschluß der Beobachtungen auf  $3\frac{1}{2}$ —10, im Mittel auf 5 Stunden zu verringern. Es wurde dann ein am Ende dieser Zeit liegender Abschnitt (von 30—180, im Mittel 83 Minuten) als Zeit des Dauerzustandes den Berechnungen zugrundegelegt, zu dessen Anfang und Ende die Temperatur der einzelnen Teile  $H_1$ ,  $R$ ,  $K_1$ ,  $L$ ,  $K_2$  und  $J$  (oberhalb  $L$  genommen) möglichst genau, die von  $E$  völlig genau gleich war. Aus den Temperaturänderungen der eben genannten Teile und ihrer leicht zu berechnenden Wärmekapazität erhält man dann die Wärmeaufspeicherung  $V_5$  (im Fall von Temperaturabnahme einen negativen Betrag, also eine Wärmeabgabe der Apparatur).  $V_5$  schwankte zwischen  $-0,9$  und  $+2,3$  Proz. und betrug im Mittel (vom Vorzeichen abgesehen) 0,8 Proz. von  $W$ . Der oben erwähnte Idealbetrag von höchstens 0,4 Proz. ist also wesentlich überschritten worden. Bei weiterer Übung im Einregulieren des Dauerzustandes des

1) Es ist dabei angenommen, daß die Temperatur von  $H_1$ ,  $R$  und dem oberhalb  $L$  liegenden Teil von  $J$  um den gleichen Betrag zunehmen wie  $t_1$ .

Apparates dürfte man zu geringeren Korrekturwerten  $V_5$  gelangen.

### 8. Messung des Gesamtverlustes $V$ .

Da die Summe der Einzelverluste  $V_1 + V_2 + V_3 + V_4 + V_5 = V$ , die bei  $8^\circ$  nur etwa  $2\frac{1}{2}$  Proz. der Gesamtheizung ausmacht, bei  $72^\circ$  bereits 10 Proz. von  $W$  betrug, schien es wünschenswert, wenigstens bei der Höchsttemperatur eine Kontrollmessung der Gesamtverluste vorzunehmen. Dies war mit großer Genauigkeit möglich, wenn in der Anordnung der Fig. 2 Luft statt Wasser sich zwischen den Kupferplatten befand und genau die gleichen Temperaturen  $t_1$  und  $t_2$  einreguliert wurden wie bei dem entsprechenden Versuch mit Wasser. Da auch hierbei keine Wasserverdampfung in Frage kam ( $V_2 = 0$  wie bei den Strahlungsmessungen), so ließ sich der Dauerzustand genau einstellen und  $V_5$  gering halten. Es ergab sich folgende Wärmebilanz:

$$W - U = V$$

$$1,696 - 0,676 = 1,020.$$

Dabei ist zur Berechnung von  $U$  die Wärmeleitfähigkeit der Luft  $\lambda_L = 0,0246$  (bei  $72,5^\circ$ ) angenommen und in  $U$  ein Betrag  $0,045$  kcal/h für den Strahlungsaustausch zwischen der oberen und unteren Kupferplatte enthalten, berechnet nach den Angaben von Wamsler.<sup>1)</sup> In  $V$  ist enthalten ein Betrag  $V_4 = 0,816$  und  $V_5 = -0,029$ . Es war somit  $V_1 + V_3 = V - V_4 - V_5 = 0,233$ , während bei den Versuchen Nr. 11 und 12 (der Tabelle 2, S. 569)  $V_1 + V_3 = 0,292$  gefunden wurde. Die Gesamtverlustmessung hat somit einen um  $0,06$  kcal/h kleineren Wert ergeben als die Einzelverlustmessung bei den Versuchen 11 und 12. Diese Differenz von weniger als 0,4 Proz. der Gesamtheizwärme könnte dadurch beseitigt werden, daß man die Innentemperatur  $t_1$  bei den Hauptversuchen etwas größer annähme als bei den Strahlungs- und Gesamtverlustmessungen, da bei der gleichen Temperatur  $t_1$  der oberen Kupferplatte  $H_1$  und  $R$  bei ersteren Versuchen etwas wärmer waren als bei letzteren. Doch soll hiervon (trotz vorhandener Versuchsunterlagen) abgesehen werden, da Fehler von einigen

1) F. Wamsler, Mitt. über Forschungsarb. auf d. Gebiete des Ingenieurwesens Heft 98 u. 99. S. 1. 1911.

Promille bei unseren Messungen nicht zu vermeiden waren und durch diese Korrektur der Anschein größerer Genauigkeit mit Unrecht erweckt würde.

#### IV. Versuchsergebnisse.

Die Durchführung der Hauptversuche bedarf nun keiner Beschreibung mehr, da alle Einzelheiten in den früheren Abschnitten genau geschildert sind.

Die wichtigsten Einzelergebnisse der Versuche sind in der Tabelle 2 zusammengestellt.  $t$  bezeichnet darin die mittlere

Tabelle 2.

Einzelergebnisse der Versuche.

Vers. Nr.	$t$	$W$	$V_1$	$V_2$	$V_3$	$V_4$	$V_5$	$V = \frac{\sum V_i}{n}$	$U = W - V$	$t_1 - t_2$	$\frac{F(t_1 - t_2)}{d}$	$\lambda$
1	7,4 <sup>o</sup>	10,19	0,083	0,070	0,096	0,024	0,000	0,27	9,92	4,38 <sup>o</sup>	20,47	0,4846
2	8,3	10,21	0,079	0,035	0,096	0,041	-0,020	0,23	9,98	4,36	20,56	0,4854
3	12,6	15,89	0,186	0,093	0,155	0,104	-0,059	0,43	15,46	6,70	31,04	0,4981
4	12,7	16,07	0,139	0,100	0,155	0,105	-0,055	0,44	15,63	6,82	31,48	0,4965
5	26,5	15,93	0,148	0,137	0,156	0,192	-0,145	0,49	15,44	6,61	30,01	0,5145
6	27,3	15,85	0,133	0,066	0,161	0,191	-0,143	0,41	15,44	6,47	29,90	0,5164
7	38,4	15,92	0,148	0,162	0,149	0,325	-0,109	0,67 <sub>5</sub>	15,24 <sub>5</sub>	6,36	28,69	0,5314
8	44,4	15,87	0,140	0,197	0,143	0,400	-0,056	0,82	15,05	6,04	27,70	0,5433
9	52,1	15,85	0,132	0,173	0,133	0,514	0,279	1,23	14,62	5,80	26,49	0,5519
10	62,9	15,90	0,150	0,261	0,132	0,678	0,365	1,59	14,31	5,73	25,37	0,5641
11	72,2	15,87	0,160	0,323	0,136	0,819	0,046	1,48	14,39	5,76	24,98	0,5761
12	72,6	15,85	0,157	0,297	0,132	0,839	0,147	1,57	14,28	5,60	24,47	0,5836

Temperatur der Wasserlamelle. Die Bedeutung der folgenden Spalten ist auf S. 552 und 553 erklärt; die Werte  $W$  bis  $U_5$  sind dabei in kcal/h,  $F$  ist in qm,  $d$  in m ausgedrückt. Die letzte Spalte enthält die aus den Messungen nach Gl. (6) oder (7) sich ergebenden Werte der Wärmeleitfähigkeit  $\lambda$  des Wassers in kcal. m<sup>-1</sup> Stde<sup>-1</sup> Grad<sup>-1</sup>.

#### D. Schlußfolgerungen.

Unsere Versuchsergebnisse lassen sich darstellen durch die lineare Gleichung:

$$(36) \quad \lambda = 0,4769(1 + 0,002984 t)$$

oder in cgs-Einheiten [cal.cm<sup>-1</sup> Sek<sup>-1</sup> Grad<sup>-1</sup>] durch die Gleichung

$$(37) \quad \lambda = 0,001325(1 + 0,002984 t).$$

Die nach diesen Gleichungen berechneten Werte  $\lambda_{\text{ber.}}$  sind mit den aus Tabelle 2 zu entnehmenden gemessenen Werten  $\lambda_{\text{gem.}}$  in Tabelle 3 zusammengestellt. Die Abweichung  $\Delta$  der 4. De-

Tabelle 3.

Vergleich der gemessenen und berechneten Werte von  $\lambda$ .

Vers.-Nr.	Temp. $t$	Werte in technischem Maß			Werte in cgs-Einheiten		
		$\lambda$ gem.	$\lambda$ ber.	$\Delta$	$\lambda$ gem.	$\lambda$ ber.	$\delta$
1	7,4°	0,4846	0,4874	-28	0,001346	0,001354	-8
2	8,3	0,4854	0,4887	-33	1348	1358	-10
3	12,6	0,4981	0,4948	+33	1384	1374	+10
4	12,7	0,4965	0,4950	+15	1379	1375	+4
5	26,5	0,5145	0,5146	-1	1429	1429	0
6	27,3	0,5164	0,5157	+7	1434	1432	+2
7	38,4	0,5314	0,5315	-1	1476	1476	0
8	44,4	0,5433	0,5401	+32	1509	1500	+9
9	52,1	0,5519	0,5510	+9	1533	1531	+2
10	62,9	0,5641	0,5664	-23	1567	1573	-6
11	72,2	0,5761	0,5796	-35	1600	1610	-10
12	72,6	0,5836	0,5802	+34	1621	1612	+9

zimale (in technischem Maß),  $\delta$  der 6. Dezimale (in cgs-Einheiten) zwischen  $\lambda_{\text{gem.}}$  und  $\lambda_{\text{ber.}}$  beträgt höchstens  $\pm 0,7$  Proz., im Mittel  $\pm 0,4$  Proz.

Die gemessenen Werte sind als Punkte in die Fig. 1 eingetragen, die der Gl. (36) entsprechende Gerade ist dort ebenfalls eingezeichnet. Die mehr oder minder große Annäherung der Versuchspunkte früherer Beobachter an diese Gerade, auch des H. F. Weberschen Punktes aus dem Jahr 1885, ist ziemlich zufällig. Nur dem Versuchspunkt von Milner und Chattock ist eine etwa gleichgroße absolute Genauigkeit zuzuschreiben wie unseren Versuchswerten; dieser Punkt liegt knapp 2 Proz. über unserer Geraden.

Die Wärmeleitfähigkeit des Wassers ist durch unsere Versuche zwischen 0 und 80° auf etwa 1 Proz. genau bestimmt, ihre Zunahme mit der Temperatur außer Zweifel. Diese Zunahme erfolgt im Versuchsbereich linear; der Temperaturkoeffizient beträgt etwa 3 Promille pro Grad. Versuche an anderen Flüssigkeiten und festen Körpern nach der gleichen Methode sind in Aussicht genommen.

(Eingegangen 22. Mai 1920.)

4. *Über die spektrale Polarisation des diffusen Sonnenlichts in der Erdatmosphäre<sup>1)</sup>;*  
*von H. Dember und M. Uibe.*

II. Teil.

Zur Kenntnis der Haidingerschen Polarisationsbüschel im blauen Himmelslicht.

9. Bericht über die Ergebnisse der auf Teneriffa ausgeführten Arbeiten.

1. Die Länge der Haidingerschen Polarisationsbüschel in der Atmosphäre wird von den meisten Beobachtern zwischen 3 und 6° angegeben. Den Grund dieser verschiedenen Meßresultate vermutet Helmholtz in der verschiedenen Deutlichkeit, welche die Büschel in bestimmten Höhen über dem Horizont haben. Wenn deswegen die Büschel nicht alle in gleichen Höhen beobachtet werden, so resultieren verschiedene Winkelgrößen. Aber selbst wenn die Messungen alle in gleicher Höhe über dem Horizont ausgeführt würden, so wäre eine Übereinstimmung der Zahlen schon deshalb nicht zu erwarten, weil die Empfindlichkeit des Auges für die Erscheinung von Beobachter zu Beobachter variiert, wodurch die äußersten Ränder der Büschel für den einen noch weiter vom Kreuzungspunkte weg erkennbar sind als für einen anderen. Wie groß die Empfindlichkeitsunterschiede der Beobachter sind, geht am besten aus der Tatsache hervor, daß viele es niemals lernen, die Büschel in der Atmosphäre mit Sicherheit zu sehen, während sie für andere am klaren Dämmerungshimmel in jeder Sehrichtung störend erscheinen.

Mißt man mit einem geeigneten Instrument die Winkel- ausdehnung der Büschel in ihrer Längsachse, so findet man im allgemeinen am klaren, subtropischen Himmel in allen Höhen die gleichen Winkel. Nur bei sehr günstigem Wetter, wo die Büschel in der Nähe des Zenits ganz besonders gut

1) Aus den Leipziger Berichten 1920.

zu sehen sind, ergeben die Messungen im Zenit einen etwas höheren Wert als in Horizontnähe. Es ist dies die Folge der größeren Deutlichkeit der Erscheinung, bedingt durch die nach dem Zenit wachsende Polarisationsgröße des Himmelslichts. Außerdem treten in größeren Höhen über dem Horizont zugleich mit der relativen Intensitätszunahme der kurzwelligen Strahlen die blauen Büschel deutlicher hervor, wodurch es durch Kontrastwirkung dem Auge erleichtert wird, die äußeren Ränder der gelbbraunen Büschel in größerer Entfernung vom Büschelmittelpunkt wahrzunehmen, was ebenfalls veranlaßt, daß der Winkel größer gemessen wird.

Die folgende Tab. 1 zeigt eine derartige Messung. Reihe 1 und 3 gibt die Entfernung  $d$  zweier Drahtspitzen an in einer Entfernung von 20,8 cm vom optischen Augenmittelpunkt.  $\alpha_{90}$  und  $\alpha_{15}$  sind die mit den gemessenen  $d$  berechneten Winkel, unter denen die Büschel in  $90^\circ$  und  $\sim 15^\circ$  Höhe über dem Horizont gesehen wurden.

Tabelle 1.

$d$	$\alpha_{90}$	$d$	$\alpha_{15}$	$\Delta \alpha$	Beobachter
1,85 cm	$4^\circ 52'$	1,60 cm	$4^\circ 12'$	$40'$	D
1,80	$4^\circ 44'$	1,50	$3^\circ 56'$	$48'$	U
1,80	$4^\circ 44'$	1,56	$4^\circ 6'$	$38'$	D
1,84	$4^\circ 50'$	1,46	$3^\circ 50'$	$1^\circ$	D
1,70	$4^\circ 28'$	1,38	$3^\circ 38'$	$50'$	U

Man muß von dieser, durch ein Winkelmeßinstrument meßbaren, für einen bestimmten Beobachter geringen Größenvariation eine sehr viel stärkere streng unterscheiden, eine Variation, welche in der uns zur Verfügung stehenden Lehrbuchliteratur nicht aufgeführt ist und von der wir aus Mangel an Originalliteratur nicht sagen können, ob sie schon bekannt ist.

Betrachtet man nämlich an vollständig klaren Tagen kurz nach Sonnenuntergang oder vor Sonnenaufgang den Himmel, so erblickt das empfindliche und geübte Auge die Haidingerschen Polarisationsbüschel in jeder Sehrichtung, und zwar sieht man sie in der Nähe des Horizonts auffällig größer als

in der Nähe des Zenits.<sup>1)</sup> Das Größenverhältnis ist  $> 2:1$  und die Erscheinung ist, wenn man sie einmal erkannt hat, täglich zu beobachten.

Wir haben versucht, diese subjektive Erscheinung messend zu verfolgen und eine physikalische Erklärung dafür zu geben. Hierüber soll im folgenden berichtet werden.

2. Da winkelmessende Instrumente zum Resultat führen, daß die Büschel im allgemeinen in allen Höhen die gleiche Größe haben oder daß sie im Zenit größer sind als in der Nähe des Horizonts, so bedienten wir uns beim Studium der scheinbaren Größenvariation, die umgekehrt verläuft, des gleichen Verfahrens wie bei der Untersuchung der Größenveränderung von Sonne und Mond in verschiedenen Höhen über dem Horizont.<sup>2)</sup>

Wir bildeten die Form eines gelbbraunen Büschels in Papier nach und zwar so, daß die ganze Länge 80 cm, die größte Breite an den Enden 29,5 cm, die Mitte 10 cm betrug. Dieser Vergleichsbüschel war auf Gaze aufgezogen, die in einem Holzrahmen saß. Als Hintergrund diente ein großes schwarzes Tuch.

Mit dieser Büschelform verglichen wir die am Himmel sichtbaren Haidingerschen Büschel in der Weise, daß wir einen Abstand, z. B. 27,5 m, von dem Modell wählten und dann in den verschiedenen Höhen am Himmel so lange suchten, bis wir ein Polarisationsbüschel sahen, das dem Auge gerade so groß erschien, wie die aufgestellte Büschelform. Nachdem die Höhe des betreffenden Haidingerschen Büschels am Himmel mit dem Pendelquadranten gemessen worden war, wurde ein anderer Abstand vom Vergleichsbüschel gewählt und das Verfahren wiederholt.

Früheren Erfahrungen bei Größenschätzungen folgend, sind Entfernungen vom Vergleichsbüschel unter 15 m vermieden worden, außerdem wurde dieser nur kurze Augenblicke, wie sie zur Schätzung gerade hinreichten, betrachtet. Die ganze Versuchsweise ist einfach, doch ist strenge Objektivität des Beobachters und lange Übung im Sehen der Polarisationsbüschel zur Ausführung der Größenschätzungen notwendig.

1) Leipz. Ber. 69. S. 149. 1917, Anm.; Ann. d. Phys. 56. S. 208. 1918.

2) Leipziger Berichte 69. S. 485. 1917; Ann. d. Phys. 61. S. 353. 1920.

Die folgende Tab. 2 gibt die Schätzungen und Messungen wieder, die an zwei vollständig klaren Tagen ausgeführt worden sind.

Tabelle 2.

Zeit	Höhe $\varphi_k$	Entfernung $L$	Halbwert $\varphi$	Beobachter
15. Mai 1919 6 Uhr 20 Min. nachm.	17,0°	15 m		D
	16,0	15		U
	90,0	30		D
	90,0	30		U
	35,5	22,5		U
	59,0	22,5		D
	63,5	27,5	31,5°	U
	65,0	27,5	30,6	D
15. Mai 1919 6 Uhr 35 Min. nachm.	30,0	15		D
	29,0	15		U
	62,0	22,5		U
	55,0	22,5		D
	81,0	27,5	30,6	D
	73,0	27,5	34,0	U
16. Mai 1919 6 Uhr 20 Min. nachm.	22,2	15		D
	52,0	20		D
	34,0	20		U
	61,0	25		D
	64,0	25		U
	90,0	30	30,0	D
	90,0	30	34,0	U
16. Mai 1919 6 Uhr 30 Min. nachm.	67,0	30		U
	82,7	30		D
	43,5	20		D
	31,0	20		U
	55,5	27,5		U
	52,0	27,5		D
	23,3	15	30,0	D
	17,0	15	29,0	U
16. Mai 1919 6 Uhr 40 Min. nachm.	18,5	15		U
	20,0	15		D
	90,0	30		D
	90,0	30		U
	40,0	20		U
	44,0	20		D
	59,0	25	31,0	U
	51,0	25	32,5	D

3. Nachdem durch diese Beobachtungen festgestellt war, daß die scheinbare Größenveränderung der Büschel immer zu beobachten ist, wenn die Büschel in allen Höhen am Himmel



deutlich zu sehen sind, haben wir nach einer Erklärung der Erscheinung gesucht, die so beschaffen ist, daß sie sich zahlenmäßig prüfen läßt.

Nach Helmholtz<sup>1)</sup> muß das ins Auge einfallende Licht, bevor die Stäbchen und Zäpfchen des gelben Flecks der Retina erreicht, eine gelbliche, faserige Schicht durchlaufen, die von der Zentralgrube ausstrahlt und deren Dicke nach außen abnimmt. Diese Schicht ist doppelbrechend. Das den Fasern der Schicht parallel polarisierte, blaue Licht (der außerordentliche Strahl) erleidet eine Absorption und zwar wird angenommen, daß die Absorption stärker als beim ordentlichen Strahl ist. Wird weiter berücksichtigt, daß am Rande der Netzhautgrube die Fasern eine schräg gegen den Mittelpunkt verlaufende Richtung haben, so folgt z. B. bei vertikal stehender Polarisationsebene, daß sich über und unter der Netzhautgrube dunklere Stellen bilden, rechts und links hellere, so wie man die Haidingerschen Büschel beobachtet. Man hat es hiernach mit einer rein entoptischen Erscheinung zu tun.

Zum Verständnis der scheinbaren Größenveränderung der Büschel führe man das folgende Gedankenexperiment aus. Man denke sich unmittelbar vor die Stäbchen und Zäpfchen der Retina eine sehr kleine undurchsichtige Scheibe gebracht. Diese bedeckt einen Teil des räumlichen Gesichtsfeldes und zwar schneidet sie, wenn z. B. eine weit entfernte, helle Wand betrachtet wird, einen bestimmten Teil der Wand heraus. Der Teil ist dadurch bestimmt, daß die Größe seines Bildes auf der Netzhaut, wie es von der Optik des Auges entworfen wird, gleich der Größe des gedachten Scheibchens ist. Je weiter unter sonst gleichen Umständen die Wand entfernt ist, desto größer ist der vom Scheibchen herausgeblendete Teil der Wand. Ist nun der Raum zwischen dem Auge und der hellen Wand von einem feinen leuchtenden Nebel (z. B. die Luft am Tage) erfüllt, so trifft von dem Teile des räumlichen Gesichtsfeldes, eines Kegels, dessen Basis der vom Scheibchen herausgeschnittene Teil der Wand ist und dessen Spitze im Auge liegt, kein Licht auf die Retina. Das Auge nimmt das Scheibchen wahr, die Wahrnehmung wird aber hervorgerufen durch das Licht,

---

1) Physiologische Optik.

welches von der leuchtenden Begrenzung des Kegels ausgeht. Der Winkel, unter dem die Begrenzung der Kegelbasis im Raum erscheint, ist unabhängig von der Entfernung Auge bis Wand. Dagegen ändert sich die vom Auge zur Wahrnehmung gebrachte Größe des Scheibchens mit einer Entfernungsänderung der *weit entfernten* Wand und der damit verbundenen Größenänderung der Kegelbasis.<sup>1)</sup>

Beim Betrachten der Haidingerschen Büschel tritt nun an die Stelle des Scheibchens das in der fasrigen Schicht der Netzhaut entstehende Polarisationsbüschel, an die Stelle der weit entfernten Wand tritt die Sichtweitengrenze in der Atmosphäre, d. h. das sichtbare Himmelsgewölbe.<sup>2)</sup> Ist daher die eben skizzierte Anschauung richtig, so steht zu erwarten, daß sich die scheinbare Größe der Haidingerschen Büschel in verschiedenen Höhen über dem Horizont aus der jeweilig in der betrachteten Höhe herrschenden Sichtweite berechnen läßt. Die Sichtweiten bedingen die Form des für uns vorhandenen Himmelsgewölbes, so daß sich die scheinbaren, relativen Größen der Polarisationsbüschel aus der Gestalt des Gewölbes folgern lassen.

4. Der Kalottenbogen  $H_1ZH_2$  der Fig. 1 sei das vom Beobachter in  $O$  gesehene Himmelsgewölbe,  $N_1Q_1$  und  $N_2Q_2$  seien die Längen zweier in verschiedenen Höhen über dem Horizont im  $90^\circ$ -Vertikal liegender Büschel.

Im  $90^\circ$ -Vertikal haben die gelbbraunen Büschel eine annähernd horizontale Lage, d. h. die Polarisationsebene liegt horizontal. Wir haben die gelbbraunen Büschel den blauen bei der Beobachtung vorgezogen, weil die gelbbraunen in allen Höhen über dem Horizont deutlich sind, die blauen hingegen nur in Höhen oberhalb etwa  $20^\circ$ . Die folgende Rechnung ist aus diesem Grunde nur für die horizontal liegenden, gelbbraunen Büschel durchgeführt.

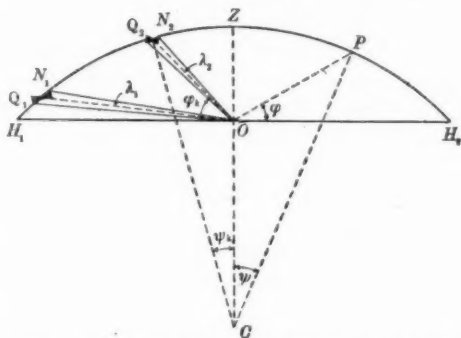
Denken wir uns das Stück des Himmelsgewölbes  $H_1Z$  in  $n$  gleiche Teile geteilt, so schneiden gleiche Winkel, die den Standort  $O$  des Beobachters zum Scheitel haben, in verschiedenen

1) Die gleichen Betrachtungen lassen sich auch auf die scheinbaren Größenänderungen anderer entoptischer Erscheinungen, z. B. der Nachbilder, anwenden.

2) Leipziger Berichte 69. S. 391. 1917; Ann. d. Phys. 61. S. 319. 1920.

Höhen über  $H_1$  eine verschieden große Anzahl der  $n$  Teile ab. Dem Zentriwinkel  $\psi_k$  mögen  $k$  solcher Teile, von  $Z$  aus gezählt, entsprechen. Es sei der Zentriwinkel  $H_1 CZ = 2\psi$ , dann gilt

$$k:n = \psi_k:2\psi.$$



Scheinbare Größenveränderung der Haidingerschen Büschel in verschiedenen Höhen über dem Horizont.

Fig. 1.

Wird  $\psi_k$  von  $Z$  aus gerechnet, so zählen auch die  $k$  in diesem Sinne. Rechnet man die Teile von  $H_1$  aus und bezeichnet sie mit  $k'$ , so wird  $n - k = k'$ . Zwischen dem Winkel  $\psi$ , der als Zentriwinkel zum Winkel  $\varphi$  gehört, wo  $\varphi$  der Winkel ist, unter dem die Höhe des Halbierungspunktes des Gewölbes von  $O$  aus geschätzt wird, der gemessenen Höhe  $\varphi_k$  eines Büschels und dem hierzu gehörigen Zentriwinkel  $\psi_k$  besteht die Beziehung

$$\cos(\varphi_k + \psi_k) = \cos 2\psi \cos \varphi_k.$$

$\psi$  bestimmt sich hierin durch den geschätzten Halbwert  $\varphi$ , der für das gerade vorhandene Gewölbe gilt, nach der folgenden Drobischschen Gleichung, wobei immer vorausgesetzt wird, daß die Form des Gewölbes eine Kugelkalotte ist, welche Bedingung immer erfüllt ist für die Höhen über dem Horizont, in denen die Beobachtungen ausgeführt wurden.

$$\cos^3 \psi - \frac{3}{4}(1 - \frac{1}{3} \operatorname{tg}^2 \varphi) \cos \psi = \frac{1}{4}(1 - \operatorname{tg}^2 \varphi).$$

Werden die aus den beiden letzten Gleichungen für  $\varphi_k$  berechneten  $\psi_k$  und  $\psi$  in die erste Gleichung eingesetzt, so ergeben sich Werte für  $k$  und  $k'$ .

Eine von  $O$  aus als Scheitel gerechnete Anzahl Grade  $\varphi_{k(1)} - \varphi_{k(2)}$  schneide von den vorhandenen  $n$  Teilen  $k'_{(1)} - k'_{(2)}$   $= \Delta k'$  Teile ab.  $N_1 Q_1$  und  $N_2 Q_2$  seien zwei Polarisationsbüschel in zwei verschiedenen Höhen, ihre Abstände von  $O$  seien  $\lambda_1$  und  $\lambda_2$ , dann ist

$$N_1 Q_1 : N_2 Q_2 = \Delta k'_{(1)} : \Delta k'_{(2)} = \lambda_1 : \lambda_2.$$

Da die vom Beobachter beim Schätzen der Büschelgrößen gemessenen Abstände  $L$  sich umgekehrt verhalten wie die scheinbaren Größen der Polarisationsbüschel, so ist weiter

$$N_1 Q_1 : N_2 Q_2 = L_2 : L_1,$$

und es folgt

$$\Delta k'_{(1)} : \Delta k'_{(2)} = L_2 : L_1.$$

Die letzte Beziehung gestattet zu prüfen, ob die scheinbare Größe der Büschel durch die Form des Himmelsgewölbes bedingt ist. Es müssen dann die beim schätzenden Vergleich gefundenen Abstände  $L$  sich wie die entsprechenden  $1/\Delta k'$  verhalten, die sich aus der Form des Himmelsgewölbes ergeben, das wir durch einen — mittels Schätzung gewonnenen — Halbwert  $\varphi$  charakterisieren. An Stelle der Schätzung dieses Halbierungswinkels  $\varphi$  ist auch die objektive Methode der Sichtweitenbestimmung aus photometrischen Messungen der Himmels-helligkeit ausführbar und die Feststellung der Sichtweiten auf solche Weite.

In den nachstehenden Kurven (Fig. 2) ist ein Vergleich der  $L$  mit den entsprechenden  $1/\Delta k'$  durchgeführt. Die  $\Delta k'$  sind von 5 zu  $5^0$  berechnet worden, wobei die Gesamtzahl der Teile zwischen  $H_1$  und  $Z$  zu  $n = 1000$  angenommen worden ist. Die ausgezeichneten Kurven sind mit diesen berechneten Werten gezeichnet, die  $\odot$  gezeichneten Punkte sind beobachtet.<sup>1)</sup>

Die Übereinstimmung der bei verschiedenen Gewölben beobachteten Punkte mit denen, welche auf den berechneten Kurven liegen, ist innerhalb der Unsicherheit, mit welcher die Größenschätzungen der Büschel behaftet sind, gut. Es tritt das noch deutlicher hervor, wenn statt der Einzelwerte die

1) Um den direkten Vergleich mit den  $L$  zu ermöglichen, sind die  $1/k'$  mit einem Zahlenfaktor, z. B. 1030, multipliziert worden.

Mittelwerte aus den Beobachtungen beider Beobachter eingezeichnet werden.

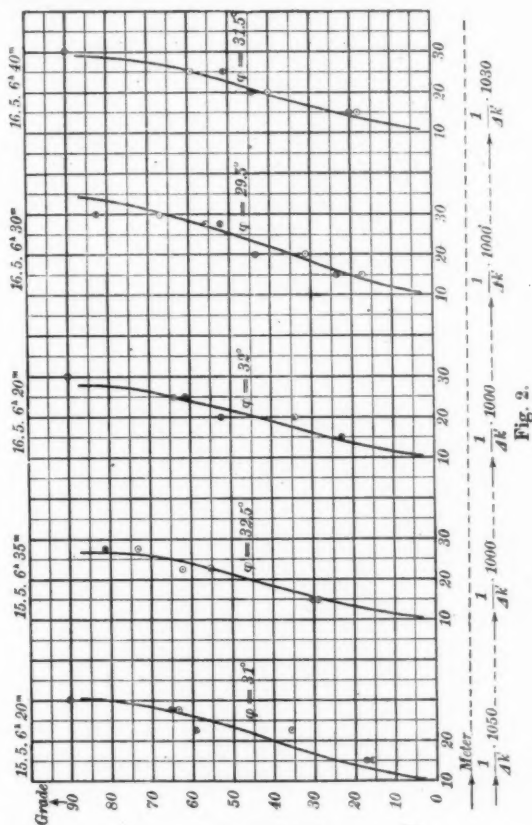


Fig. 2.

### 5. Ergebnisse.

1. Winkelmessungen an den gelbbraunen Haidingerschen Büscheln im polarisierten Licht des blauen Himmels ergeben bei sehr günstigen Verhältnissen die Büschel im Zenit etwa  $45'$  größer als in  $15^\circ$  Höhe über dem Horizont. Dieser Unterschied ist eine Folge der verschiedenen Polarisationsgrößen in verschiedenen Höhen, wodurch die Büschel mehr oder weniger deutlich zu sehen sind.

2. Dem Auge erscheinen die gelbbraunen Haidingerschen Büschel in Horizontnähe mehr als doppelt so groß als im Zenit.
3. Es wird durch Beobachtungen gezeigt, daß diese Größenvariation zahlenmäßig durch die sichtbare Form des Himmels gewölbes bedingt ist.

Den kartellierten Deutschen Akademien, welche auch zu diesen Untersuchungen die Mittel zur Verfügung gestellt haben, sagen wir ehrerbietigsten Dank.

Vilaflor (Chasna) auf Teneriffa, Juni 1919.

(Eingegangen 31. Juli 1920.)

# 5. Der Gültigkeitsbereich der Stokes-Oseenschen Widerstandsformel.

## Erklärung einiger von J. Weyssenhoff gefundener Unstimmigkeiten; von Hilding Faxén.

1. Für den Widerstand gegen eine kleine Kugel, die sich in einer reibenden Flüssigkeit bewegt, hat Oseen<sup>1)</sup> die folgende Formel hergeleitet:

$$(1) \quad F = 6 \pi \mu a V \left( 1 + \frac{3}{4} |\sigma| a \right).$$

Hier bedeutet

$F$  den Widerstand,

$\mu$  den Koeffizienten der inneren Reibung,

$a$  den Radius der Kugel,

$V$  die Geschwindigkeit,

$\varrho$  die Dichte der Flüssigkeit,

$$\sigma = \frac{\varrho V}{2 \mu}.$$

Oseen hat mir 1915 vorgeschlagen, diese für eine unendlich ausgedehnte Flüssigkeit geltende Formel für den Fall zu erweitern, daß die Flüssigkeit von einer ebenen Wand begrenzt wird. Ich hoffe meine Untersuchungen darüber im Anfang nächsten Jahres als Doktorarbeit (Uppsala) veröffentlichen zu können. Da die Ergebnisse dieser Arbeit zur Erklärung einer von Weyssenhoff<sup>2)</sup> gefundenen Unstimmigkeit beitragen, sollen hiermit einige vorläufige Mitteilungen gemacht werden.

2. Eine Kugel, die sich parallel einer ebenen Wand bewegt, erfährt den Widerstand

$$(2) \quad F = \frac{6 \pi \mu a V}{1 - \frac{3}{4} \sigma a - \frac{9}{16} \frac{a}{\zeta} \chi(\sigma \zeta)}.$$

1) C. W. Oseen, Arkiv f. mat., astr. o. fys. **9**, Nr. 16. 1913.

2) J. Weyssenhoff, Ann. d. Phys. **62**, S. 17. 1920.

Hier ist  $\zeta$  der Abstand zwischen Wand und Kugelmittelpunkt. Glieder von den Größenordnungen  $\sigma^2 a^2$  und  $a^3/\xi^3$  sind gegen 1 vernachlässigt.

$\chi(\sigma\zeta)$  ist eine neue Funktion mit den ersten Gliedern<sup>1)</sup>

$$\chi(\sigma\zeta) = 1 - \frac{4}{3}\sigma\zeta + \frac{23}{16}\sigma^2\zeta^2 - \frac{16}{9}\sigma^3\zeta^3 + \frac{317}{864}\sigma^4\zeta^4 \\ + \frac{8}{9}\sigma^5\zeta^5 + \dots - \left\{ \frac{25}{24}\sigma^4\zeta^4 + \dots \right\} \log \frac{\sigma\zeta}{2},$$

wo

$$r = c^U = 1,781070 \dots$$

Das zweite Glied von  $\chi$  hebt Oseens Glied gerade auf!

Die ersten Glieder der asymptotischen Reihe für  $\chi$  sind

$$\chi = -0,2390 \dots \frac{1}{(\sigma\zeta)^{3/2}} - \frac{1}{3(\sigma\zeta)^3} - 0,1635 \dots \frac{1}{(\sigma\zeta)^{5/2}} + \frac{15}{(\sigma\zeta)^3} + \dots$$

Das Restglied dieser Reihe kann mehr als hundertmal so groß sein wie das erste vernachlässigte Glied.

Die folgende Tafel ist lehrreich.

$\sigma\zeta$	= 0	0,1	0,2	0,4	0,6	1	2	5
$\chi$	= 1	0,88	0,78	0,626	0,514	0,360	0,170	0,0262
$\chi + \frac{4}{3}\sigma\zeta$	= 1	1,013	1,046	1,160	1,314	1,694	2,836	6,693

3. Lorentz<sup>2)</sup> hat die Widerstandsformel

$$F = \frac{6\pi\mu a V}{1 - \frac{9}{16} \frac{a}{\zeta}}$$

gefunden. Nach 2. ist diese richtig, wenn

$$\chi(\sigma\zeta) + \frac{4}{3}\sigma\zeta$$

nicht erheblich von 1 abweicht. Das ist der Fall, wenn  $\sigma\zeta$  kleiner als etwa 0,1 ist (vgl. die Tabelle).

Aus der asymptotischen Darstellung ergibt sich die auffallende Tatsache, daß  $\chi$  für sehr große  $\sigma\zeta$  negativ ausfällt. Es muß also ein Gebiet geben, wo die Wand den Widerstand vermindert. Da  $\sigma^2 a^2$  klein gegen 1 sein muß, ist diese Wirkung jedoch nicht experimentell nachweisbar. Für  $\sigma\zeta$  größer als 5

1) The Svedberg u. H. Andersson, Koll. Zeitschr. 24. S. 157. 1919. Meine Formel ist leider dort etwas falsch zitiert.

2) H. A. Lorentz, Abhandl. über theor. Phys. I. S. 40. Teubner, Leipzig 1911.



ist die Einwirkung der Wand sehr klein und die Oseensche Formel anwendbar. Es ergeben sich also die folgenden Resultate:

A. Wenn die Reynoldsche Zahl  $\sigma\zeta$  sehr klein ist, so hebt die Wand das Oseensche Zusatzglied auf und das Lorentzsche Verfahren führt zu richtigen Ergebnissen.

B. Wenn  $\sigma\zeta$  von der Größenordnung 1 ist, wird die ausschlaggebende Funktion  $\chi$  durch sehr verwickelte Reihen gegeben.

C. Wenn  $\sigma\zeta$  groß ist, wird die Einwirkung der Wand sehr gering und die Oseensche Widerstandsformel gültig.

4. Nun läßt sich vermuten, daß die Sätze A, B und C auf Fallversuche in Röhren ohne weiteres übertragbar sind. Wenn man die Oseensche Widerstandsformel prüfen will, muß man die Experimente so anordnen, daß  $\sigma$  mal dem Halbmesser der Röhre groß wird, z. B. etwa 20 (vgl. C).

Im Jahre 1915 habe ich Oseens Formel mit einigen experimentellen Ergebnissen verglichen und habe Unstimmigkeit bei Arnolds<sup>1)</sup> und gute Übereinstimmung bei Allens<sup>2)</sup> Versuchen gefunden. Bei Arnolds Versuchen ist aber der Unterschied zwischen Partikel- und Röhrendurchmesser so klein, daß Oseens Formel fast nie verwendbar ist. Bei Allens Versuchen mit Paraffinkugeln stimmt Oseens Formel, wenn

$$2\sigma a = \frac{\rho a V}{\mu} < 1,3$$

ist. Luftblasen erfahren einen etwas kleineren Widerstand als die Formel angibt; sie sind ja auch keine starren Kugeln. Die Tafeln hierzu werden in meiner Doktor-Arbeit veröffentlicht.

Aus Arnolds Versuchen mit Kugeln aus Roseschem Metall kann man schließen, daß Ladenburgs Formel (für in Röhren fallende Kugeln) einen größeren Gültigkeitsbereich hat als die entsprechende von Lorentz (für in der Nähe einer ebenen Wand fallende Kugeln). Aus Arnolds Fig. 3 kann man vielleicht auch den von Weyssenhoff erwähnten interessanten Schluß ziehen, daß die Gefäßwände den Widerstand unter Umständen meßbar vermindern können.<sup>3)</sup>

1) H. D. Arnold, Phil. Mag. 22. S. 755. 1911.

2) H. S. Allen, Phil. Mag. 50. S. 323. 1900.

3) Man bemerke, daß Arnolds Zeichner „Diameter of tube“ statt „Radius of tube“ geschrieben hat.

Für die Entscheidung von hierher gehörigen Fragen gibt es zwei Wege. Erstens kann man Oseens Formel für den Fall erweitern, daß die Kugel längs der Achse einer Röhre fällt, d. h. Oseens und Ladenburgs Formeln miteinander verbinden. Diesen Weg werde ich in meiner Doktorarbeit betreten. Zweitens kann man neue Experimente mit weiteren Röhren machen.

Zum Schluß möchte ich bemerken, daß Oseens Formeln<sup>1)</sup> für den Widerstand gegen Ellipsoide (Erweiterungen der Formeln von Oberbeck) weniger bekannt zu sein scheinen.

Göttingen, Juni 1920.

---

1) C. W. Oseen, Arch. d. Math. 24. S. 108. 1916.

(Eingegangen 28. Juni 1920.)

